

Math. P.

440

Math. P. 44 l

Boerner

LEHRBUCH
ZUR
EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE
FÜR HÖHERE SCHULEN

VON
DR. H. BÖRNER,

OBERLEHRER AN DER REALSCHULE ERSTER ORDNUNG ZU RUHRORT.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.



LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1879.

20/8 29

168 H

m
M

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig*).

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Von Dr. Karl Heinrich Vierjemann. gr. 8. 1871. geh. *M.* 1.20.

Abriss der Arithmetik und Algebra für Schüler an Gymnasien und Realschulen. Von Dr. E. SCHRÖDER. I. Heft: Die sieben algebraischen Operationen. 8. 1874. geh. *M.* —.60.

Leitfaden beim ersten Unterricht in der Algebra, enthaltend die sieben Rechnungsoperationen, systematisch geordnet und methodisch behandelt. Von Dr. FRANZ SOMMER, Oberlehrer zu Münster-eifel. gr. 8. 1874. geh. *M.* —.60.

Praktische Anweisung zur Behandlung der Bruchrechnung und der bürgerlichen Rechnungsarten für angehende Lehrer. Von E. Th. Schütze, Oberlehrer am Seminar zu Waldburg. Zugleich ein ausgeführter Lehrgang in sechs Kreisen. gr. 8. 1877. geh. *M.* 4.—

Frage- und Aufgabenhefte zur Bruchrechnung und den bürgerlichen Rechnungsarten; für Fortbildungsschulen, untere Seminar- und Realschul-
klassen nach seiner „praktischen Anweisung“ bearbeitet von E. Th. Schütze. 2 Hefte. gr. 8. 1878. geh. *M.* 2.20.

Einzeln: I. Heft: Bruchrechnung und Regelbetr. *M.* 1.—

II. Heft: Die bürgerlichen Rechnungsarten mit abgekürzter Decimalbruchrechnung.

Anhang: Die Auflösungen zu den Aufgaben von Heft 1 u. 2. *M.* 1.20.

Methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 8000 Aufgaben enth., über alle Theile d. Elementar-Arithmetik für Gymnasien, Realschulen u. polytechnische Lehranst. Von E. Bardenh. 8. Aufl. gr. 8. 1879. geh. *M.* 2.70.

Resultate hierzu *M.* 1.— [Werden nur an Lehrer geliefert.]

Praktische, leichtfaßliche Anleitung zur Buchstabenrechnung und Algebra mit vielen Beispielen und im Anschluß an die Aufgabensammlungen von Meier Hirsch und Bardenh. Für Seminarien, Gewerbeschulen, höhere Bürgerschulen und zum Selbstunterricht. Von J. B. Montag. 5., gänzlich umgearbeitete und stark vermehrte Auflage. gr. 8. 1877. geh. *M.* 5.—

Elemente der Geometrie. Von J. Frischauf, Professor in Graz. 2. umgearbeitete Auflage. gr. 8. 1877. geh. *M.* 2.—

Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maasses. Ein Lehrbuch von Dr. O. SCHLÖMILCH. I. Theil: Planimetrie und ebene Trigonometrie. 5. Aufl. 8. 1874. geh. *M.* 4.—

II. Theil: Geometrie des Raumes.

3. Aufl. gr. 8. 1874. geh. *M.* 4.—

Leitfaden der ebenen Geometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. I. Theil erstes Heft. Die geradlinigen Figuren und der Kreis. Mit Uebungen. Von Dr. HUBERT MÜLLER. Zweite umgearbeitete Auflage. (Mit vielen Holzschnitten im Text und 2 lithogr. Tafeln.) gr. 8. 1878. geh. *M.* 1.60.

I. Theil zweites Heft. Anhang: Erweiterungen zu Theil I. und Einleitung in die neue Geometrie. Mit Uebungen. Zweite umgearbeitete Auflage. (Mit vielen Holzschnitten im Text u. 2 lithogr. Tafeln.) gr. 8. 1878. geh. *M.* 1.20.

*) Ein vollständiges Verzeichniss des ausgedehnten Teubner'schen Verlags auf dem Gebiete der Mathematik, Physik und technischen Wissenschaften, darunter insbesondere Werke von Cantor, Clebsch, Durège, Fiedler, Gordan, Hesse, Kirchhoff, Neumann, Salmon, Schlömilch, Steiner, Sturm u. A., ist in allen Buchhandlungen gratis zu haben. Hier sind nur diejenigen Werke aufgeführt, welche etwa beim Unterricht an Gymnasien, Real- und technischen Hochschulen benutzt werden können.

LEHRBUCH
ZUR
EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE
FÜR HÖHERE SCHULEN

VON

DR. H. BÖRNER,

OBERLEHRER AN DER REALSCHULE ERSTER ORDNUNG ZU RUHRORT.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.



LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1879.



Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Vorwort.

Der bisherige Anfangsunterricht in der Geometrie trägt in der Art, wie er noch vielfach ertheilt wird, den Entwicklungsgesetzen des menschlichen Geistes zu wenig Rechnung. Daher denn auch die wenig befriedigenden Resultate desselben. Kaum in irgend einem anderen Unterrichtsgegenstande aber ist gerade der Anfangsunterricht von einer solchen Wichtigkeit für das weitere Fortschreiten, wie hier. — Für die Werthschätzung jener bisher gebräuchlichen, starren (euklidischen) Methode, welche mit dem fertigen System an den Anfänger herantritt, haben wir den besten Massstab in der Behauptung, die man vor nicht vielen Jahren noch häufig genug hören konnte, dass zur Erlernung der Mathematik — ich spreche selbstverständlich nur (und jene Behauptung meint auch nichts Anderes) von der Elementarmathematik — eine besondere Beanlagung gehöre. Man braucht nicht sehr tief in das Gebiet der Psychologie eingedrungen zu sein, um die Unhaltbarkeit jener Behauptung a priori einzusehen; ausserdem aber liefern die Resultate des heutigen Unterrichts vielfach den strictesten Beweis vom Gegentheil. — Es soll nun aber keineswegs geleugnet werden, dass die Mathematik an und für sich dem Anfänger mehr Schwierigkeiten darbietet als andere Lehrgegenstände, und ich stimme dem, was Schrader hierüber sagt*, bei; jedoch schreibe ich den hervortretenden Mangel an Interesse nur zum kleinsten Theil dem Gegenstande selbst, zum grössten aber der bisherigen Methode zu und behaupte, dass sich der Unterricht sehr wohl so einrichten lässt, dass das Interesse stetig wachgehalten wird.

* Schrader, Erziehungs- und Unterrichtslehre, S. 524: „Ein ... erschwerender Umstand liegt in der Mathematik selbst. Sie wendet sich ausschliesslich an den Verstand und findet nicht leicht eine solche Theilnahme, wie diejenigen Unterrichtsgegenstände, welche den Geist in mehrseitige harmonische Bewegung setzen. Denn hier liegt eigentlich der Grund jener irrigen Meinung: nicht die Befähigung, wohl aber das Interesse für die Mathematik ist ungleich und aus dieser Ungleichheit entwickelt sich dann der Mangel an Aufmerksamkeit und Fleiss.“

1.

Worin bestehen nun die Fehler der bisherigen Methode? Sie sind zwiefacher Natur. Die Art des bisherigen Unterrichts ist zu tadeln, sowohl was die Behandlung des Inhalts, als auch was die der Form anlangt. — Der Gang, den der mathematische Unterricht bisher genommen hat, ist ein zu wenig natürlicher. In den Naturwissenschaften, der Geographie u. s. w. ist es ein längst anerkannter Grundsatz, dass der Unterricht anzuknüpfen habe an Begriffe, welche dem Knaben bereits geläufig sind, dass er von diesen gegebenen Begriffen ausgehend sein Augenmerk darauf zu richten habe, dieselben zu verwerthen, auf ihnen fussend den Gesichtskreis durch ungezwungenes Hinzufügen neuer Begriffe zu erweitern und so den Knaben unmerklich in das System hineinzuführen, so dass dieses sich als Schluss des Ganzen von selbst ergebe. Der mathematische Unterricht hat bisher den umgekehrten Weg eingeschlagen. Er trat mit dem fertigen System an den Knaben heran; er lehnte sich nicht an bekannte Begriffe an, sondern begann damit, die schwierigsten, in das Grenzgebiet von Mathematik und Philosophie fallenden abzuleiten. — Das erste Gefühl des Knaben, der gezwungen wird, über Begriffe zu reflectiren, die ihm in ihrer Anwendung längst geläufig sind, ist Staunen; die vorhandenen Vorstellungsmassen widerstreben den neu hinzutretenden, welche in ihrer abstracten Form wenig übereinstimmende Merkmale darbieten. Ein unmittelbares Interesse kann auf diese Weise nicht entstehen. — Diesen Fehler, das Allgemeine an die Spitze zu stellen und daraus das Besondere und Einzelne abzuleiten, begeht die bisherige Lehrmethode im weiteren Verlaufe des Anfangsunterrichts fortwährend; überall setzt sie die Gattung voran und leitet daraus die Art ab. So sehr man es nun tadeln würde, wenn ein Lehrer der beschreibenden Naturwissenschaften eine Gattung aus ihren Merkmalen construiren und daraus deductiv die Arten ableiten und dann erst die in der Natur vorhandenen Repräsentanten als Belege vorführen wollte, ebenso verwerflich ist dieses Verfahren für den mathematischen Anfangsunterricht. Derselbe muss, soweit es der Natur des Gegenstandes gemäss möglich ist, inductiv verfahren. Wie überall, so scheint mir auch hier das Richtige zu sein, dass der Knabe, wenn nicht den wirklichen, so doch einen möglichen Entwicklungsgang der Menschheit noch einmal durchmache. Die ersten mathematischen Wahrheiten sind zweifellos auf empirischem Wege gefunden, die Linien, Winkel, Figuren sind an physischen Gegenständen wahrgenommen worden, und das Vergleichen zwischen den Individuen derselben Art und

den verschiedenen Arten derselben Gattung hat zum Auffinden des Gemeinschaftlichen, zu den Begriffen und Eigenschaften der Art und Gattung geführt.

Der zweite Fehler der bisherigen Methode liegt in der Form. Es ist didaktisch tadelnswerth und kann nur abschreckend wirken, wenn dem Knaben ausser der durch die Abstraction, welche der Gegenstand fordert, hervorgerufenen Schwierigkeit des Inhalts auch noch solche in der Form geboten werden; es ist zu viel, was dem jugendlichen Geiste auf einmal zugemuthet wird. Naturgemäss ist es, den Knaben erst eine Reihe von Wahrheiten finden, ihn an vielen Beispielen fühlen zu lassen, wie nöthig es sei, vor eingehender Betrachtung einer Figur sich erst recht klar darüber zu sein, welche Eigenschaften derselben aus dem Früheren bekannt seien, ehe man ihn formell streng Voraussetzung, Behauptung und Beweis scheiden lässt. Je mehr jene Nöthigung sich aufdrängt, je mehr es sich an Beispielen gezeigt hat, welche Unzuträglichkeiten bei mangelnder Klarheit in Bezug auf die bekannten Eigenschaften sich ergeben, desto mehr wird sich von selbst das Bedürfniss herausstellen, diese bekannten Eigenschaften in einer bestimmten, knappen Form an die Spitze zu setzen, und ebenso das Ziel, auf welches man hinsteuert, bestimmt zu formuliren.

2.

Die erwähnten Uebelstände sind vielfach erkannt worden; man suchte ihnen abzuhelpen durch Einrichtung propädeutischer Curse. An vielen Anstalten wurde dem eigentlichen wissenschaftlichen Unterrichte eine sogenannte Formenlehre vorausgeschickt, deren Inhalt Definitionen, Benennungen, Constructionen u. s. w. bildeten. Da jedoch die Ertheilung dieses Unterrichts noch häufig genug in durchaus unsystematischer Weise geschah, von einer, wenn auch noch so einfachen Begründung und Entwicklung meist keine Rede war, so gelangte man bald zu der Einsicht, dass der Nutzen dieser Einleitungen, welche die Hauptschwierigkeiten nicht hoben, verschwindend sei und gab sie auf. — Nutzbringender sind Curse, die an der Hand systematisch angelegter Lehrbücher, welche die Wahrheiten (wenn auch nur empirisch) ableiten, gehalten werden. Ich rechne hierher die Lehrbücher von Schram*, Hoffmann** und Falke***, die ich bei meiner Arbeit theilweise benutzt habe.

* Schram, Anfangsgründe der Geometrie oder geometrische Formenlehre. Wien, Bock 1871.

** Hoffmann, Vorschule der Geometrie. Halle, Nebert 1874.

*** Falke, Propädeutik der Geometrie. Leipzig, Quandt & Händel 1866.

Ein Hauptfehler, den vor Allem die beiden ersten haben, scheint mir darin zu liegen, dass sie in Bezug auf die Methode ein allmähliges Fortschreiten vermissen lassen, indem sie die im Anfange empfehlenswerthe und für die erste Einführung durchaus geeignete inductive Methode unverändert beibehalten bis zu einer Zeit, wo es längst keine Schwierigkeiten mehr hervorrufen würde, die strenge mathematische Beweisführung eintreten zu lassen. Alle diese Curse wollen eben nichts anderes sein als Vorschulen; der wissenschaftliche Unterricht soll sich unvermittelt in der alten Weise daran schliessen. Der Nutzen, den sie haben, steht in Folge dessen in keinem richtigen Verhältnisse zu der aufgewandten Zeit und Mühe.

Ist es nun richtig, dass die bisherigen propädeutischen Curse ihre volle Wirksamkeit nicht entfalten können, weil der Methode der stetige Fortschritt fehlt, so drängt sich uns die Frage auf: Nach welchen Principien ist denn ein Cursus einzurichten, der den oben berührten Mängeln der bisherigen Methode abhilft? Die Antwort, deren Richtigkeit das vorliegende Werkchen durch seinen Inhalt bestätigen will, lautet: Der Cursus darf kein bloss propädeutischer sein, sondern er muss ein Einführungscursus sein; der Unterricht darf nicht bloss an die Thüre der Wissenschaft klopfen, sondern er muss in dieselbe hineinführen. Es ergeben sich im Einzelnen drei Aufgaben, welche die „Einführung in die Geometrie“ in Hinsicht auf dieses Ziel zu erfüllen hat: Sie muss 1. an bekannte Begriffe anknüpfen und so eine unmerkliche Einführung bewerkstelligen. Sie darf aber nicht unausgesetzt diesen Weg gehen, sie darf nicht immerfort und Alles in derselben Weise inductiv finden wollen, so dass am Schlusse der eigentliche wissenschaftliche Gang sich unvermittelt anschliesst, sondern sie muss 2. allmählig die Methode ausbilden und sich im Verlaufe des Unterrichts immer mehr und mehr der strengen mathematischen Form anzuschliessen bestrebt sein, so dass zwischen Einführungscursus und wissenschaftlichem Unterrichte keine scharfe Grenze vorhanden ist, sondern ein unmerklicher Uebergang stattfindet. Zu dem Ende aber muss 3. das Ganze streng systematisch geordnet sein und darf die Begründung keine Lücke enthalten.

Diese Principien glaube ich in der vorliegenden Arbeit befolgt zu haben. Dieselbe ist das Ergebniss einer langjährigen Unterrichtserfahrung. Nachdem die zu Grunde liegende Gedankenreihe ihren Anstoss erhalten hatte durch das Schram'sche Buch oder vielmehr durch das darin für den geometrischen Anschauungs-

unterricht durchgeführte Princip der Verschmelzung des Stereometrischen mit dem Planimetrischen, ist sie im Laufe von vier Jahren an der Hand der Praxis entwickelt, erweitert und ausgebaut worden. Schon im Jahre 1876 legte ich in der Programmabhandlung der Realschule I. Ordn. zu Ruhrort die Grundzüge für den zweiten Theil des Lehrbuches nieder. Mittlerweile hat die Ausführung derselben durch die Erfahrung von zwei neuen Unterrichtsjahren manche Verbesserung und Erweiterung erfahren. Sehen wir nun zu, in welcher Weise die vorhin aufgestellten Forderungen im Einzelnen erfüllt worden sind!

3.

In dem ganzen Unterrichtsgange lassen sich zwei Hälften unterscheiden, etwa entsprechend dem Sommer- und Wintersemester. In der ersten Hälfte werden, ausgehend von den dem Schüler unbewusst innewohnenden Begriffen, „gerade Linie, Ebene u. s. w.“, das Rechnen mit Strecken, Längenmessung, das Rechnen mit Bogen, Bogenmessung, das Rechnen mit Winkeln, Winkelmessung im Anschluss an praktische Messübungen im Freien, denen sich Uebungen in der Klasse anreihen, eingeübt; in der zweiten Hälfte werden die Vierecke (Parallelogramme) und Dreiecke, sowie die Lehre von den Parallelen im Anschluss an stereometrische Anschauungsübungen in der Klasse durchgenommen.

Die Messübungen, welche durch die verlangte Selbstthätigkeit der Schüler und durch ihre praktische Verwendbarkeit das Interesse in hohem Grade anregen, müssen sich natürlich auf die einfachsten Probleme der Feldmesskunst beschränken; abgesehen von anderen Gesichtspunkten ist hier allein schon der Grund massgebend, dass die dazu nöthigen Hilfsmittel keine zu grossen Kosten verursachen dürfen. Trotzdem aber ist ein Abschluss dadurch erreicht worden, dass die wenigen Operationen doch für eine beschränkte Terrainaufnahme ausreichen. Uebrigens ist dafür Sorge getragen, dass der Lehrer, welcher in der Werthschätzung dieser Uebungen meine Ansicht nicht theilt, sie ohne Schaden für den Zusammenhang weglassen resp. durch eine Demonstration an der Wandtafel ersetzen kann. — Ich füge einige Bemerkungen in Bezug auf diejenige Art der Ausführung dieser Uebungen bei, welche mir die Erfahrung als die zweckmässigste hat erscheinen lassen: Der Nutzen, den die Uebungen haben können, wird nur dann voll hervortreten, wenn die ganze Klasse denselben mit ungetheiltem Interesse folgt, wenn also während der von Einzelnen (der Reihe nach) ausgeführten Operationen die

Aufmerksamkeit der Uebrigen auf das Vorgenommene gerichtet ist. Dazu aber ist, wenigstens bei den späteren Uebungen, erforderlich, dass dieselben vorher in der Klasse nach einer Zeichnung an der Wandtafel besprochen werden. Bei der Messübung selbst aber muss ein regelmässiger Wechsel in der Reihenfolge derjenigen Schüler stattfinden, welche die einzelnen Operationen vornehmen; wenn möglich soll in einer Messstunde jeder Schüler einmal an die Reihe kommen. Während nun die Manipulationen von Einzelnen ausgeführt werden, müssen die Anderen in turnerischer (militärischer) Ordnung in der Nähe stehen und sich auch geordnet von einer Stelle des Platzes zur anderen bewegen. Durch vielfach eingestreute Fragen ist inzwischen für die Wahrung der Aufmerksamkeit zu sorgen. Ist eine derartige Gesamtarbeit Aller auf dem Messplatze (z. B. wegen zu grosser Schülerzahl) nicht zu erreichen, so beschränke man sich lieber auf die Demonstration in der Klasse und lasse dann vielleicht nachträglich die Ausführung der einen oder anderen Uebung bei Gelegenheit eines Spaziergangs in etwas freierer Weise folgen.

An die Uebungen im Freien schliesst sich eine Durcharbeitung des gewonnenen Materials in der Klasse; dabei erstrebt der Anschauungsunterricht einen möglichst engen Anschluss an den Rechen- und Zeichenunterricht. Der Uebungsstoff ist demgemäss (diese Bemerkungen gelten auch für den zweiten Theil) durchweg in drei Rubriken: „Anschauung, Rechnen, Zeichnen“ getheilt. Die Anschauungsübungen sollen die gewonnenen Begriffe durch Betrachtung von anderen Gesichtspunkten aus, durch gegenseitige Beziehung derselben auf einander deutlich machen, und die Rechen- und Zeichenübungen wollen sie befestigen. Die Rechenübungen sind gleichzeitig so eingerichtet, dass sie eine Vorübung für den Unterricht in der allgemeinen Arithmetik bilden. Die Zeichenübungen aber sind als wirkliche Zeichenaufgaben zu betrachten und demgemäss mit der grössten Sorgfalt, auch was die Technik anlangt, auszuführen; der Lehrer kann hier nicht streng genug in seinen Anforderungen sein. Die darauf verwandte Zeit lohnt sich für den späteren mathematischen und Zeichenunterricht hundertfältig. Um die technische Handhabung der Instrumente überwachen und leiten zu können, müssen von Zeit zu Zeit die Aufgaben gemeinschaftlich in der Klasse gezeichnet werden. Als erprobt habe ich dabei das folgende Verfahren gefunden: Die ganze Klasse zeichnet gleichzeitig das, was von einem Schüler unter Beihilfe eines anderen nach der jedesmaligen speciellen Angabe des Lehrers in vergrössertem Massstabe an die Wandtafel vorgezeichnet wird, aber immer nur das Vorgezeichnete. Die Art der Lösung selbst

muss natürlich vorher besprochen resp. heuristisch entwickelt werden. Das Ausziehen der Figuren mit Tusche geschieht am besten zu Hause, nachdem die Handhabung der Ziehfeder in einer resp. zwei Stunden in der Schule eingeübt worden ist. Dabei dürfte es zweckmässig sein, die Zeichenaufgaben in ein besonderes Zeichenheft eintragen zu lassen und das Ausziehen sämtlicher in einer Woche gezeichneten Figuren der Zeitersparniss für den Schüler wegen auf den Schluss der Woche zu verlegen.

Was nun den zweiten Theil anlangt, so sucht der das vorzugsweise verlangte Anknüpfen an bekannte Vorstellungen durch Ableitung der betreffenden Wahrheiten aus der Anschauung physischer Körper zu erreichen. Das Naturgemässeste für den mathematischen Unterricht überhaupt würde sein (vergl. Schrader a. a. O.), dass der geometrische Unterricht die Trennung des Stereometrischen und Planimetrischen überall vermiede. Consequent ist eine Vereinigung beider ohne vollständige Aenderung in der Eintheilung der Klassenpensa nicht durchzuführen. Ich bin nun nicht dafür, den bisher üblichen, allgemein angenommenen und in seinem Fortschreiten auch bewährten Gang des Unterrichts zu ändern, da eine solche Aenderung nicht absolut nothwendig ist, um das Stereometrische mit Nutzen für den Einleitungscursus zu verwerthen. Für diesen muss allerdings das concrete anschauliche Einzelwesen den Mittelpunkt bilden, von welchem aus die mathematischen Wahrheiten entwickelt werden und um welchen sie sich gruppiren. — Durch die Heranziehung des Stereometrischen wird ein gewichtiges, das Interesse der Schüler erfahrungsmässig ungemein weckendes Moment in den Unterricht eingeführt. Nichts hält bekanntlich das Interesse des Knaben mehr wach, als das stete Hinsteuern auf ein Ziel, welches eine praktische Leistung seinerseits in Aussicht stellt (vergl. die Einl. bei Falke). — Als ein solches Ziel nun setze ich für den Anfangsunterricht das Modelliren von Körpern aus Pappe hin. Ich will den Gedanken an einem Beispiele kurz erläutern und verweise im Einzelnen auf die spätere Ausführung. Nachdem das Messen von Linien, Bogen, Winkeln u. s. w. in der vorhin erwähnten Weise eingeübt worden ist, wird ein Würfel vorgezeigt, der Name genannt, oder besser erfragt, und nun direct als Aufgabe hingestellt: Wir wollen lernen, einen solchen Körper aus Pappe zu verfertigen. Das Interesse kann noch dadurch erhöht werden, dass man mit Hinweis auf die Bedeutung des Würfels als Mass (Liter), die ja dem Knaben aus dem Rechenunterrichte bekannt ist, die Aufgabe noch specialisirt. Das Interesse des Knaben ist durch die Aussicht auf eine prak-

tische Leistung seinerseits wachgerufen worden und er wird nun den weiteren Entwicklungen, die zu dem Ziele führen, gespannt folgen. Es werden nun empirisch (s. §§ 25, 26) alle diejenigen Eigenschaften entwickelt, welche zur Construction des Würfelnetzes nöthig sind, also die Eigenschaften des Quadrats. So führt dann dieser Weg auch hier naturgemäss zur Befolgung dessen, was ich unter 2. als erste Aufgabe des Einführungsunterrichts hinstellte, vom Einzelnen zum Allgemeinen fortzuschreiten, von der Art zur Gattung. Das Quadrat wird ohne Rücksicht auf seine Gattung, das Parallelogramm behandelt; ebenso die anderen Arten von Parallelogrammen. Erst nachdem der Schüler sämtliche Arten von Parallelogrammen kennen gelernt hat, wird der Gattungsbegriff aus dem allen Gemeinsamen abgeleitet. Man möge mich jedoch nicht missverstehen; ich meine nicht, dass alle Gattungsbegriffe inductiv abgeleitet werden sollen. Gattungsbegriffe, die dem Quartaner schon geläufig sind, wie „Dreieck“, „Viereck“ u. s. w., werden direct als Grundlage angenommen und nur streng definirt. Dass bei Befolgung dieses Weges die Vierecke vor den Dreiecken zur Behandlung kommen, ist naturgemäss, denn der Begriff Viereck liegt dem Knaben viel näher als der Begriff Dreieck, weil der ersten Anschauung überwiegend das Viereck entgegentritt.

4.

Die zweite aus dem Ziele des Einführungscursus sich ergebende Aufgabe war die allmälige Ueberführung in den wissenschaftlichen Unterricht. Methode und Ausdrucksweise müssen sich allmähig vervollkommen und zwar die letztere an der Hand der ersteren. Zunächst tritt das inductive Finden der Wahrheiten durch Messen und Aufeinanderlegen von verschiedenen Einzelwesen derselben Art in den Vordergrund. Allmähig können beim Aufeinanderlegen einzelne Wahrheiten allgemeingiltig bewiesen werden, nachdem sie jedoch immer vorher schon inductiv gefunden sind. Der Uebergang zu strengerer Beweisführung findet beim Capitel von der Symmetrie statt; jedoch wird auch hier noch nicht die strenge Sonderung von Voraussetzung, Behauptung und Beweis der Form nach gefordert. — Die Symmetrie entwickelt die Wahrheiten schon allgemein, doch ist dabei die Anschauung so überwiegend, dass der Uebergang nach den bis dahin stattgefundenen Vorübungen ein unmerklicher ist. Diese Art von allgemeiner Beweisführung in Verbindung mit der durch Decken tritt von da an in den Vordergrund, während das Messen nur noch zur Prüfung der gefundenen Wahrheiten

angewandt wird. — Ist dann hinlänglich die Art einer allgemeinen Beweisführung an der Symmetrie geübt, so wird der Uebergang zur gewöhnlichen Methode gemacht. Am besten eignet sich hierzu das Capitel vom allgemeinen Dreieck. Jetzt wird auch bei der Wiederholung (nicht bei dem Auffinden der Wahrheiten) die strenge Sonderung der drei Theile des Beweises gefordert. Auch hier dürfte der Uebergang kein plötzlicher sein, da ja die Momente der allgemeinen Beweisführung fortgesetzt geübt sind und nur die strenge Anordnung und präzise Bezeichnung als etwas Neues hinzukommt.

Es ist hier der Ort, der eigenthümlichen Art der Behandlung Erwähnung zu thun, welche die Lehre von den Parallelen erfahren hat. Zunächst ist hervorzuheben, dass ich in Bezug auf die Stellung dieses Capitels innerhalb des Ganzen von der bisher gebräuchlichen Anordnung abgewichen bin. Die Behandlung der Parallelen nämlich an der Stelle, wo sie bis jetzt in den Lehrbüchern auftreten, ist eine höchst undankbare Arbeit für Lehrer und Schüler. Beide athmen erleichtert auf, wenn sie dieses Gebiet hinter sich haben, gleich als ob sie aus dornigem Dickicht auf gebahnten Weg träten. Der Grund für die didaktischen Schwierigkeiten, welche dieser Unterrichtstheil bietet, liegt in der Nichtbefolgung der zwei aufgestellten Forderungen: Anknüpfung an bekannte Begriffe, allmälige Vervollkomnung der Form. Die Lehre von den Parallelen wird zu abstract hingestellt und die hinzutretende schwierige Form macht diese an und für sich leichten Wahrheiten zu einer unverdaulichen Kost für den Anfänger. Ich habe die Parallelen erst behandelt, nachdem die einzelnen Parallelogramme nebst ihren Theildreiecken durchgenommen sind. Zunächst ist durch diese Anordnung erreicht worden, dass der Begriff der Parallelen selbst an zahlreichen Arten des Auftretens dem Schüler vorher unbewusst geläufig geworden ist, dass also der Unterricht an Bekanntes anknüpft. Die Form aber, welche zur Anwendung kommt, die Symmetrie, bietet dem Schüler gar keine Schwierigkeit mehr, weil sie schon die vielfältigsten Anwendungen vorher erfahren hat. Mittels der Symmetrie lassen sich übrigens die Fundamentalsätze über die Parallelen nicht nur scharf, sondern auch elegant beweisen. Die wenigen Fundamentalsätze (in § 64) werden dann dazu benutzt, die bisher an den einzelnen Parallelogrammen aufgefundenen Wahrheiten zusammenzufassen, aus den Arten die Gattung zu abstrahiren. Auf diese Weise wird an jener Stelle auf völlig ungezwungene Art ein Abschluss des Bisherigen erreicht, der geeignet ist, den Uebergang zu der strengen Beweisart bei der Betrachtung des Dreiecks im Allgemeinen wesentlich zu erleichtern.

5.

Ich komme nun zu der letzten der an den Einführungscursus gestellten Forderungen, der systematischen Vollständigkeit. Bei dem geschilderten Gange ist fortgesetzt darauf Bedacht genommen, dass die Beweise für die Wahrheiten, die früher nicht allgemein, sondern nur inductiv gegeben sind, allmählig an geeigneter Stelle nachgeholt werden, so dass der weitere Fortgang später nicht gestört wird; so gewinnt der Unterricht den Charakter einer wirklichen Ein- und Hinüberführung. Die Darstellung des Lehrbuches musste eine ziemlich ausführliche sein, weil der Unterricht in den Anfangsgründen der Mathematik nicht nur der schwierigste, sondern auch in seinen aus der jeweiligen Art der Ertheilung sich ergebenden Folgen für dieses Fach der schwerwiegendste ist. Ruht der Unterricht, wie es sich häufig genug nicht wird vermeiden lassen, in den Händen junger, in der Kunst der Heuristik noch unerfahrenen Lehrer, so ist eine derartige Ausführlichkeit dringend geboten. Der erfahrene Lehrer wird, wenn er nur im Grossen und Ganzen den durch die aufgestellten Principien vorgezeichneten Weg befolgt, im Einzelnen ohne Schaden davon abweichen können. — Dass das schliesslich erreichte wissenschaftliche System vollständig ist, beweist die am Schlusse des Werkes gegebene systematische Zusammenstellung der bewiesenen Lehrsätze. Die Reihenfolge im System musste selbstverständlich eine andere werden, als diejenige war, welche bei der Auffindung der Wahrheiten befolgt wurde. Das Allgemeine steht im System an der Spitze und das Besondere und Einzelne ordnet sich ihm unter. Das Verzeichniss — hinter jedem Lehrsätze sind die Stellen seines strengen Beweises, sowie die zur Verwendung kommenden Lehrsätze angeführt — wird ergeben, dass in der That das System lückenlos und die Einführung in den wissenschaftlichen Unterricht erreicht ist, so dass ein directes Fortschreiten des Unterrichts nach jedem der gebräuchlichen Lehrbücher (von dem über das Trapez handelnden Abschnitte an) erfolgen kann.

Was nun die Zeit anlangt, welche für die Absolvirung des gedachten Pensums nöthig ist, so lässt sich meiner Erfahrung gemäss bei einem vierstündigen Unterrichte das gesammte Material in Quarta mit Leichtigkeit bewältigen; aber auch ein dreistündiger Unterricht genügt, wenn einige Beschränkung in der Durcharbeitung des Uebungsstoffes eintritt. Uebrigens dürfte es keine Schwierigkeiten machen, dem geometrischen Anfangsunterrichte in der Realschule vier und im Gymnasium drei Stunden

zuzuwenden dadurch, dass der Rechen- oder Zeichenunterricht eine ihrer Stunden zu diesem Zwecke abgeben oder dass, was auf dasselbe hinausläuft, der Mathematiklehrer der Quarta eine der Zeichenstunden übernimmt. Für den Zeichenunterricht erwächst hieraus durchaus kein Schaden, wenn die geometrischen Constructionen, welche leider häufig genug schon in Quinta gemacht werden, aus diesem Unterrichte verschwinden. Durch das innige Inbeziehungsetzen der beiden Unterrichtsfächer wird eine Concentration erreicht, welche beiden zu Gute kommt. Denn es ist doch wohl völlig unpädagogisch, ja geradezu unverantwortlich, mit den Schülern etwas vorzunehmen, dessen Richtigkeit sie nicht einsehen, sie mit einem Worte mechanisch abzurichten. Der Zeichenunterricht sündigt in dieser Beziehung noch sehr; er müsste nach mancher Seite hin in ein viel innigeres Verhältniss zu dem mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichte treten. Ich erinnere nur an die Perspective, die an vielen Schulen schon getrieben wird, ehe die Schüler mit stereometrischer Auffassung vertraut sind, ferner an die mechanische Art der Betreibung der descriptiven Geometrie, an das vollständige Vernachlässigen der mannigfachen Anknüpfungspunkte, welche der botanische Unterricht in den unteren Klassen (Zeichnen von bekannten Blattformen) und der physikalische in den oberen (Zeichnen physikalischer Apparate statt unverstandener Maschinen) dem Zeichenunterrichte darbietet. Es ist hier nicht der Ort, meine Wünsche und Ansichten in dieser Beziehung vollständig zu entwickeln; ich bescheide mich vorläufig, den Hebel an einem Punkte anzusetzen — vielleicht, dass sich von da aus die ganze träge Masse des herkömmlichen Betriebes in Bewegung setzen lässt —, indem ich fordere: der Zeichenunterricht hat in den unteren Klassen auf geometrisches Zeichnen (mit Lineal und Zirkel) vollständig zu verzichten; das geometrische Zeichnen tritt zum ersten Male in Quarta auf und zwar im mathematischen Unterrichte selbst; zu diesem Zwecke giebt der Zeichenunterricht eine Stunde an die Mathematik ab.

Bei beschränkter Stundenzahl dürfte es sich empfehlen, die Abschnitte von XVIII an der Tertia zu überweisen, also von jener Stelle an, die ich oben unter 4) als eine abschliessende Grenze bezeichnete. Man fürchte nicht, dass dadurch eine zu grosse Verschiebung in den hergebrachten Pensen stattfinde, denn das durch den Cursus hervorgerufene Verständniss gestattet nachher durchweg ein rascheres Fortschreiten.

Zum Schlusse ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Professor Schram meinen herzlichsten Dank auszusprechen für die Liebenswürdigkeit, mit welcher er mir die in seinem Lehrbuche enthaltene reichliche und wohlgeordnete Aufgabensammlung zu beliebiger Benutzung zur Verfügung gestellt hat (die meisten der unter „Uebungsstoff“ enthaltenen Aufgaben sind derselben entnommen), sowie die würdige Ausstattung anerkennend hervorzuheben, welche der Herr Verleger dem Werkchen angedeihen liess.

Ruhrort, im Juli 1879.

Dr. Börner.

Inhalt.

	Seite
I. Die Gerade.	
§ 1. Messübungen	1
§ 2. Punkt, Strecke, Halbstrahl, Strahl u. s. w.	2
Rechnung mit Strecken.	
§ 3. Addition von Strecken	3
§ 4. Subtraction von Strecken	4
§ 5. Multiplication einer Strecke mit einer ganzen Zahl	5
§ 6. Division einer Strecke	6
§ 7. Längenmessung	7
§ 8. Verhältniss zweier Strecken	8
II. Die Kreislinie.	
§ 9. Messübungen. Benennungen am Kreise	9
§ 10. Congruente Kreise, gleiche Sehnen u. s. w.	12
§ 11. Uebungsstoff	12
Rechnung mit Bogen.	
§ 12. Addition und Subtraction von Bogen	13
§ 13. Multiplication und Division von Bogen	14
§ 14. Bogenmessung, Verhältniss zweier Bogen	16
III. Der Winkel.	
§§ 15, 16, 17. Messen unzugänglicher Entfernungen	19
§ 18. Der Transporteur	22
§ 19. Winkel, Centriwinkel	22
§ 20. Terrainaufnahme	23
§ 21. Eintheilung der Winkel	24
§ 22. Rechnung mit Winkeln	25
§ 23. Winkelpaare, Winkel über einer Geraden, Winkel um einen Punkt	29
§ 24. Senkrechte Geraden	31
IV. Würfel und Quadrat.	
§ 25. Betrachtung des Würfels. Quadrat	33
§ 26. Anfertigung des Würfels	34
§§ 27, 28, 29. Weitere Eigenschaften des Quadrats	36

	Seite
V. Das gleichschenklige-rechtwinklige Dreieck.	
§ 30	38
VI. Gerade Oblongsäule und Rechteck.	
§ 31. Betrachtung der geraden Oblongsäule	39
§ 32. Anfertigung der geraden Quadrat- und der geraden Oblong- säule	41
§§ 33, 34, 35, 36. Weitere Eigenschaften des Rechtecks	41
VII. Das ungleichseitig-rechtwinklige Dreieck.	
§§ 37, 38, 39	45
VIII. Die Symmetrie.	
§ 40. Erklärung	47
§ 41. Grössenbeziehung symmetrischer Gebilde	48
§ 42. Symmetrische Punkte	48
§ 43. Symmetrische Geraden	49
§ 44. Uebungsstoff	50
§ 45. Unmittelbare Anwendungen	50
IX. Anwendung der Symmetrie auf den Kreis.	
§ 46	51
X. Anwendung der Symmetrie auf Quadrat und Rechteck.	
§ 47	53
XI. Rhomboëder und Rhombus.	
§ 48. Betrachtung und Anfertigung des Rhomboëders	54
§§ 49, 50, 51. Weitere Eigenschaften des Rhombus	55
§ 52. Fundamentalaufgaben	57
XII. Das gleichschenklige Dreieck.	
§§ 53, 54, 55	58
XIII. Gleichseitiges Dreieck, Tetraëder, Octaëder, Ikosaëder.	
§§ 56, 57, 58	62
XIV. Schiefe Rhomboidsäule und Rhomboid.	
§ 59. Entstehung der schiefen Rhomboidsäule	65
§ 60. Weitere Eigenschaften des Rhomboids	66
XV. Das ungleichseitige Dreieck.	
§ 61	67

	Seite
XVI. Dreieck, Viereck und Vieleck im Allgemeinen.	
§§ 62, 63	68

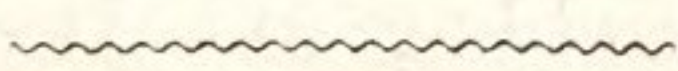
XVII. Theorie der Parallelen.

§ 64. Erklärung und Fundamentalsätze	70
§§ 65, 66. Das Parallelogramm	72
§ 67. Parallele Geraden mit Transversalen	75
§ 68. Uebungsstoff	76
§ 69. Parallelwinkel	76

XVIII. Das Dreieck im Allgemeinen.

§ 70. Winkel. Seiten. Beziehungen zwischen den Gegenständen	78
§ 71. Ein- und umgeschriebene Kreise	80
§ 72. Construction der Figuren, Congruenzsätze	81
§ 73. Anwendungen der Congruenzsätze	84
§ 74. Uebungsstoff	85
§ 75. Aenderung der Gegenstände	86

Systematische Zusammenstellung der bewiesenen Lehrsätze	87
--	-----------



Vorbemerkungen.

1. Die allgemeinen Lehrsätze, welche nachher im System auftreten, müssen auswendig gelernt werden und sind durch fetten Druck hervorgehoben.

2. Bei den Zeichenaufgaben ist innerhalb der Klammern angedeutet, welche Mittel in Anwendung kommen sollen. Fehlt die Andeutung, so gilt die zuletzt angegebene. Abkürzungen:

A = Augenmass, C = Cirkel, D = Dreieck,
 L = Lineal, M = Massstab, T = Transporteur.

3. Ein Hauptgewicht ist darauf zu legen, dass die Werkzeuge und Veranschaulichungsmittel, welche zur Betreibung des Unterrichts in dem in der Vorrede erwähnten Sinne nöthig erscheinen, in ausreichendem Masse vorhanden sind (die meisten derselben lassen sich im Laufe des Unterrichts leicht anfertigen). Dahin gehören: Lineal und Dreieck zum Zeichnen an der Wandtafel (was in mm gegeben ist, wird in cm an die Tafel gezeichnet); Messkette; Messstangen (6 bis 8); Messtisch in einfachster Form (§ 17); grosser Transporteur, dessen Zahlen weithin sichtbar sind (§ 18); mehrere unter sich congruente Würfel (§ 25); gerade Quadratsäulen; gerade Oblongsäulen (§ 32); ein Würfel, verschiebbar aus Drahtstäben zusammengesetzt (§ 48); mehrere congruente Rhomboëder (§ 48); Tetraëder, Octaëder, Ikosaëder (§ 56); mehrere congruente schiefe Rhomb- und Rhomboidsäulen (§ 59). Unter den Körpern muss jedesmal einer sein, welcher sich zum Netz ausbreiten lässt. Ferner aus Latten oder Stäben zusammengesetzt: ein Quadrat (§ 27); ein Rechteck (§ 35); ein Rhombus (§ 48); ein Rhomboid (§ 60) für das Auflegen auf eine an die Tafel gezeichnete congruente Figur. Die Diagonalen sind bei diesen Figuren durch Bindfäden vertreten.

I. Die Gerade.

§ 1.

Uebungen im Freien.

1. Erklärung. Eine Linie, welche immer in derselben Richtung fortläuft, heisst eine gerade Linie. Eine begrenzte gerade Linie heisst Strecke.

2. Aufgaben. 1. Eine Strecke, deren Länge (durch die Länge eines Bindfadens) gegeben ist, abzustecken! (2 Messstangen, 1 Bindfaden.)

2. Die abgesteckte Strecke um ein (durch die Länge eines andern Bindfadens oder die Grenze des Terrains) gegebenes Stück zu verlängern! (Zuerst 2 Mann; der eine visirt ein, der andere hält die Stangen; dann einer allein.) Addition von Strecken.

3. Von zwei im Felde abgesteckten Strecken den Durchschnittspunkt zu bestimmen! (Zunächst roh, indem der Betreffende sich ungefähr an den Ort stellt, wo beide Stangenpaare sich decken, dann genauer, durch Einvisiren der von ihm gehaltenen Stange durch zwei Andere.)

4. Eine abgesteckte Strecke um ein gegebenes Stück zu verkürzen! Subtraction von Strecken.

5. Eine Strecke 1, 2, 3 (u. s. w.) mal um sich selbst zu verlängern! (Ein Bindfaden wird zwischen den Stangen der ursprünglichen Strecke gespannt befestigt, sodann die erste Stange herausgehoben und, nachdem sie durch eine andere ersetzt ist, mit Spannung des Fadens in die Verlängerung der ersten Strecke gesetzt. Dann wird die zweite Stange ausgehoben u. s. w.) Multiplication einer Strecke mit einer ganzen Zahl.

6. Eine abgesteckte Strecke in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen! (Spanne zwischen den Stangen einen Bindfaden, lege denselben so oft zusammen, als die Anzahl beträgt u. s. w.) Division einer Strecke durch eine ganze Zahl: Theilung.

7. Zu untersuchen, wie oft eine abgesteckte Strecke in einer anderen enthalten ist! (Die abzutragende Strecke wird durch 2 Stangen

mit dazwischen gespanntem Bindfaden bezeichnet.) Division einer Strecke durch eine andere: Messung.

8. Ein Viereck sei abgesteckt. Suche den Durchschnittspunkt der Strecken, welche zwei gegenüberliegende Stangen verbinden.

9. Ein Dreieck sei abgesteckt. Halbiere 2 Seiten, bestimme den Durchschnittspunkt der Verbindungsstrecken dieser Halbierungspunkte mit den gegenüberliegenden Ecken und sieh zu, wie oft das kleinere Stück dieser Verbindungsstrecken in dem grösseren enthalten ist, u. s. w., u. s. w.

§ 2.

1. Bemerkung. Beim Visiren musste man längs der Kanten der ersten Stange vorbeisehen, wenn das Resultat genau werden sollte. Wie dick müsste die Stange sein, damit man dies nicht nöthig hätte? Wie dick müssen wir uns also eine mathematische Linie denken? Welche Ausdehnung hat der Ort, wo die so gedachte Stange sich befindet?

Erklärung. a) Eine mathematische Linie hat nur eine Ausdehnung (Länge).

b) Ein Ort, welcher keine Ausdehnung hat, heisst Punkt.

c) Die Punkte, durch welche eine Strecke begrenzt wird, heissen ihre Endpunkte. (Bezeichnung der Strecke: AB , a.) Fig. 1.

Fig. 1.

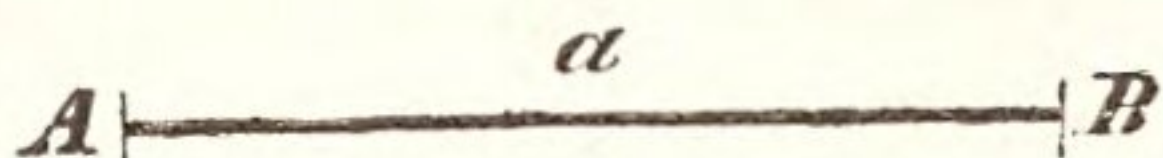
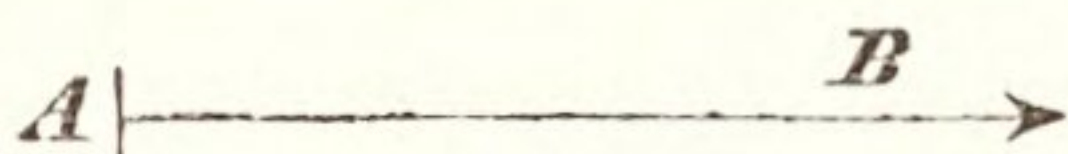


Fig. 2.



Bemerkung. Darstellung einer Linie a) im Freien: durch einen Bindfaden, eine Furche (Trace) u. s. w.; b) auf der Tafel oder dem Papier: durch eine Kreide-, Bleistift- oder Tintenspur. Wovon hängt der Grad der Genauigkeit bei der Darstellung einer Linie ab?

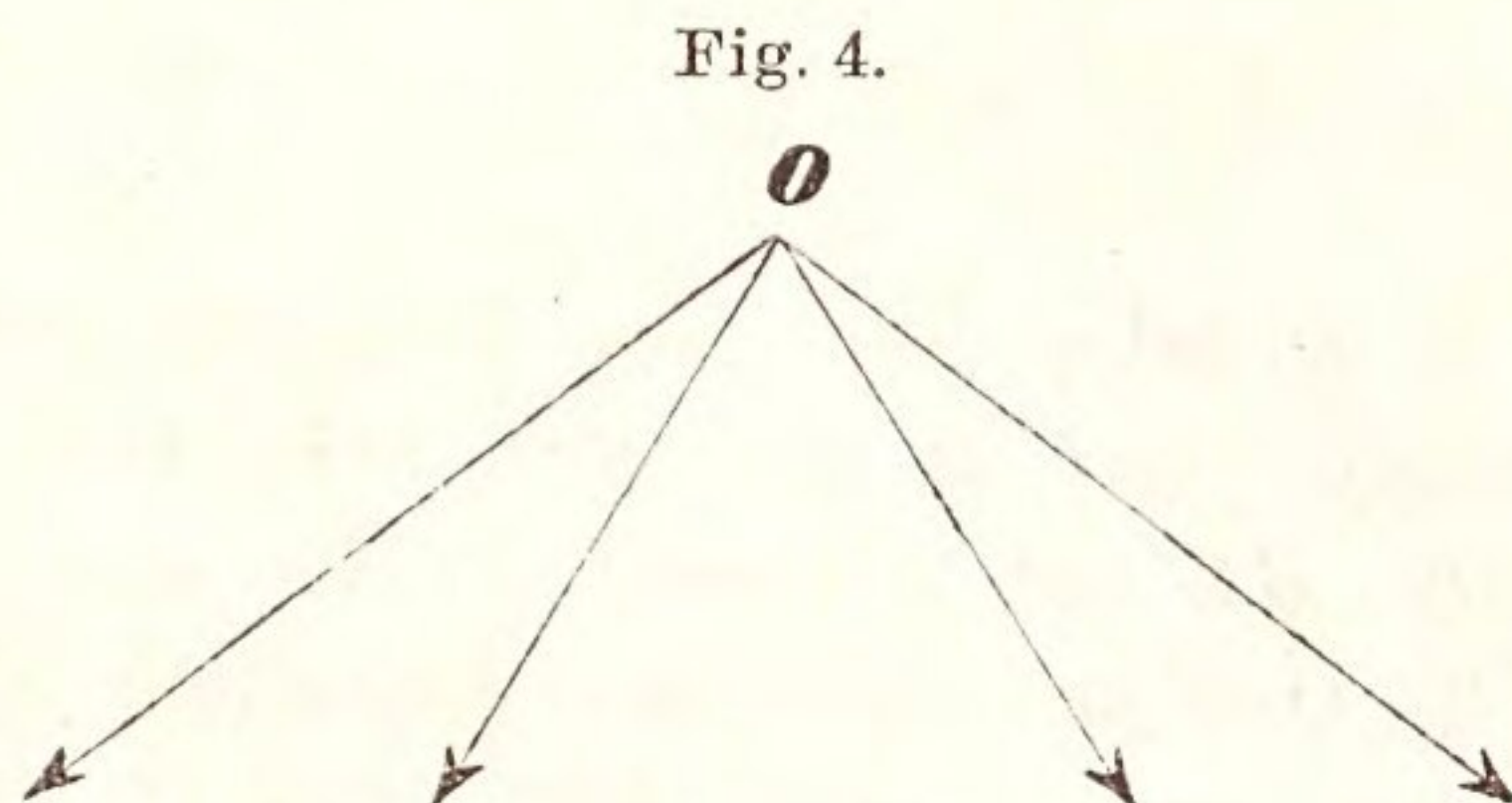
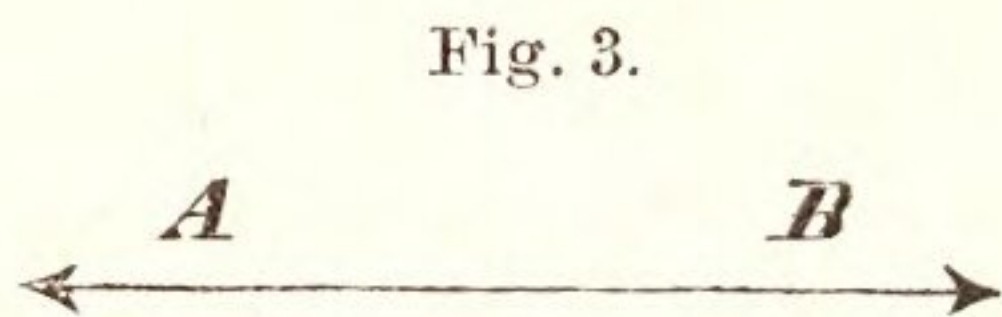
2. Aufgabe. Zeichne (ziehe) eine Strecke, verlängere dieselbe! Wie weit kann man sich eine Strecke verlängert denken?

Erklärung. a) Eine halbbegrenzte gerade Linie heisst Halbstrahl. (Benennung: AB . Zeichen: 1 Pfeil.) Fig. 2.

b) Eine unbegrenzte gerade Linie heisst Strahl. (Benennung: AB . Zeichen: 2 Pfeile.) Fig. 3.

Grundsatz. Durch zwei ihrer Punkte ist eine Gerade vollkommen bestimmt.

Aufgabe. Zeichne mehrere Halbstrahlen, die von einem und demselben Punkte ausgehen.



Erklärung. Gehen mehrere Halbstrahlen von einem Punkte aus, so heisst das entstandene Gebilde ein Halbstrahlenbüschel; der Ausgangspunkt heisst Strahlenpunkt. Fig. 4.

Grundsatz. Die einzelnen Halbstrahlen eines Büschels unterscheiden sich nur durch ihre Richtung.

3. Zeichne zwei Strecken (AB , CD oder a , b) und vergleiche dieselben mit einander!

Zwei Strecken sind entweder gleich ($=$) oder ungleich ($\neq$).

Aufgabe. Schreibe das Resultat der vorigen Aufgabe in mathematischer Zeichensprache auf!

Grundsätze: a) Gleiche Strecken können so übereinander gelegt werden, dass sie sich decken.

b) Die Strecke ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten. Entfernung oder Abstand der Punkte.

Rechnung mit Strecken.

§ 3.

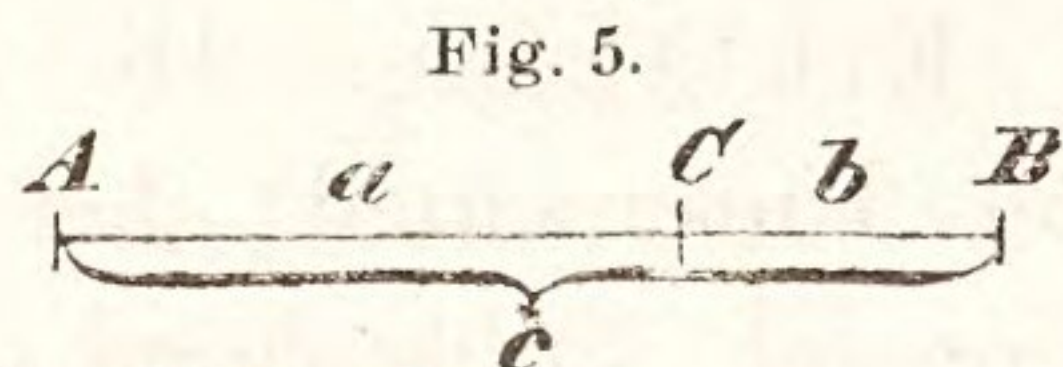
Addition von Strecken.

1. Aufgabe. Stelle die Ausführung der Aufgabe 2 in § 1 bildlich dar!

Erklärung. Die Strecke AB (c) ist die Summe der beiden Strecken

AC (a) und CB (b). (Summanden.) Fig. 5.

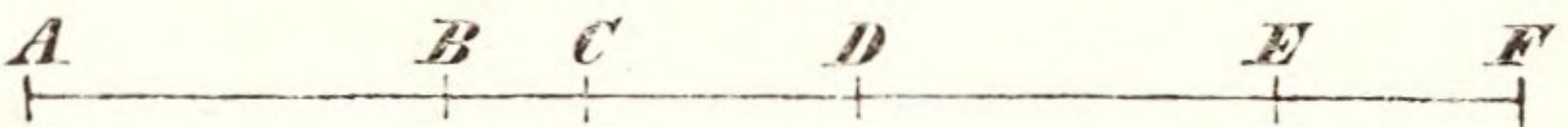
$$AB = AC + CB \text{ oder } c = a + b.$$



2.

Uebungsstoff.

Fig. 6.

Anschaung: 

1. Drücke jede der folgenden Strecken als die Summe zweier Strecken aus: a) AC , BD , CE , DF ; b) AD , BE , CF auf 2 Arten; c) AE , BF auf 3 Arten; d) AF auf 4 Arten!

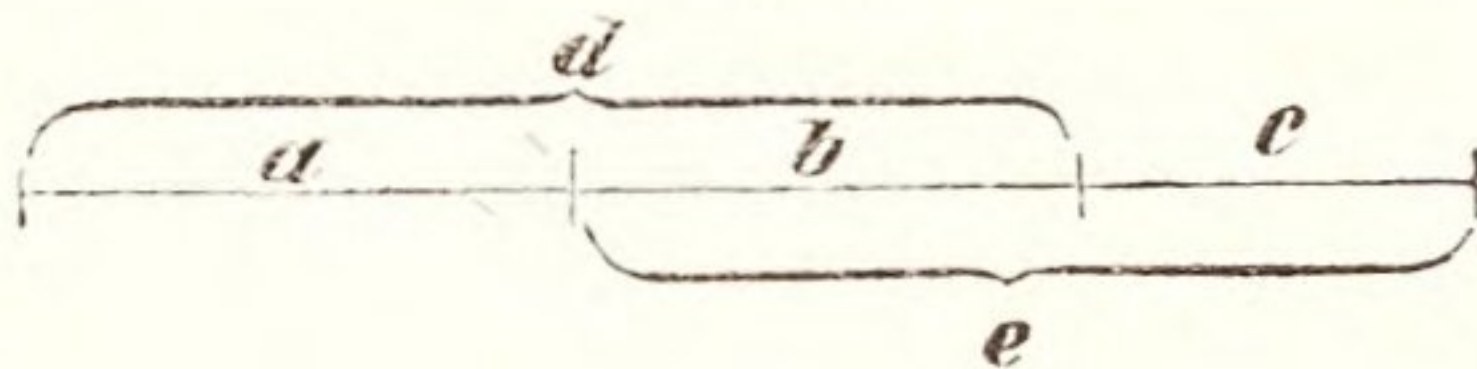
2. Drücke jede der folgenden Strecken als die Summe dreier Strecken aus: a) AD , BE , CF ; b) AE , BF auf 3 Arten; c) AF auf 6 Arten!

3. Drücke jede der Strecken AE und BF als die Summe von 4 Strecken aus!

4. Drücke die Strecke AF als die Summe von 5 Strecken aus!

5. Welche Strecke ist gleich: a) $AC + CF$? b) $BC + CE$? c) $BD + DF$? d) $AB + BD + DE$? e) $AC + CE + EF$?

Fig. 7.



6. Drücke jede der Strecken d und e als die Summe zweier Strecken aus! Fig. 7.

Zeichnen. 7. (L. A.) Zeichne drei Strecken AB , CD , EF , so dass $AB > CD$, $CD > EF$!

8. Zeichne drei Strecken a , b , c , so dass $a < b$, $b < c$!

9. (L. C.) Zeichne die folgenden Summen: a) $AB + CD$; b) $AB + EF$; c) $CD + EF$; d) $AB + CD + EF$! (Aufg. 7.)

10. Zeichne die Summen: a) $a + b$; b) $a + c$; c) $b + c$; d) $a + b + c$! (Aufg. 8.)

11. (L.) Zeichne eine Strecke und stelle sie dann als Summe zweier Strecken dar!

12. Verbinde zwei Punkte G und K durch eine Strecke und gib dann einen dritten Punkt L an, so dass $GK = GL + LK$ wird!

§ 4.

Subtraction von Strecken.

1. Aufgabe. Stelle die Ausführung der Aufgabe 4 § 1 bildlich dar!

Erklärung. Die Strecke $AC(c)$ heisst die Differenz (der Unterschied) der beiden Strecken $AB(a)$ und $BC(b)$. Minuend, Subtrahend. Fig. 5 ist an die Tafel zu zeichnen!

$$AB - BC = AC \text{ oder } c - b = a.$$

2. **Uebungsstoff** (Fig. 6 und 7).

Anschaung: 1. Drücke jede der folgenden Strecken als Differenz zweier Strecken aus: a) AB, BC, CD, DE, EF auf 4 Arten; b) AC, BD, CE, DF auf 3 Arten; c) AD, BE, CF auf 2 Arten; d) AE, BF !

2. Welche Strecke ist gleich: a) $AD - AB$? b) $BE - CE$? c) $BF - BD$?

3. Drücke jede der Strecken a, b, c als Differenz zweier Strecken aus und zwar b auf zwei Arten! Fig. 7.

Zeichnen: 4. (L. C.) Zeichne drei Strecken AB, CD, EF , so dass $AB > CD, CD > EF$, und dann die Differenzen: a) $AB - BC$; b) $AB - CD$; c) $CD - EF$!

5. Zeichne drei Strecken a, b, c ($a < b, b < c$) und dann die Differenzen: a) $c - b$; b) $b - a$; c) $c - a$!

6. (L.) Zeichne eine Strecke und stelle sie als Differenz zweier Strecken dar!

7. Verbinde zwei Punkte R und S durch eine Strecke und gieb einen Punkt T an, so dass $RS = RT - ST$ ist!

§ 5.

Multiplication einer Strecke mit einer ganzen Zahl.

1. Aufgabe. Stelle die Ausführung der Aufgabe 5 in § 1 bildlich dar!

Erklärung. Die Strecke AC (b) ist das 7fache der Strecke AB (a). Product, Factoren: Fig. 8.

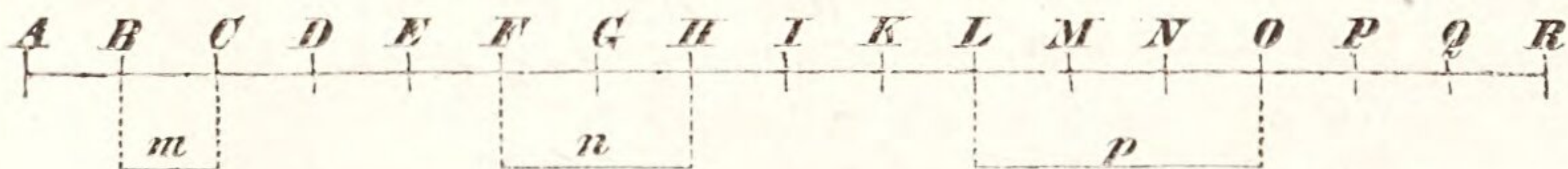
$$AC = 7 \cdot AB = 7AB \text{ oder } b = 7 \cdot a = 7a.$$

Fig. 8.

2. **Uebungsstoff.**

Anschaung:

Fig. 9.



1. Das Wievielfache von AB ist jede der Strecken AE, BH, FM, EP, DR ?

2. Gieb Strecken an, die 3, 4, 5, 6 mal so gross sind als GH !

3. Gieb Strecken an, die $= 3m, 5m, 2n, 3n, 3p, 4p$ sind!

4. Gieb eine Strecke an, die das Dreifache von $BC + MO$ ist!

Gieb eine Strecke an, die 5. $= 3m + 2n + p$; 6. das Dreifache von $CM - GO$; 7. das Doppelte von $5n - 2p$ ist!

Zeichnen: 8. (*L. C.*) Zeichne eine Strecke m und dann die Strecken $2m$, $3m$, $5m$!

9. Zeichne zwei Strecken m und n ($m > n$) und dann Strecken, welche den Ausdrücken $3m + 2n$ und $3m - 2n$ entsprechen!

10. Zeichne eine Strecke MN und verlängere sie über M hinaus bis O , so das $MO = 4MN$ ist!

§ 6.

Division einer Strecke durch eine ganze Zahl und durch eine Strecke.

1. Aufgabe. Stelle die Aufgabe 6 in § 1 bildlich dar!

Erklärung. Die Strecke AB (a) ist der siebente Theil der Strecke AC (b). Theilung. Dividend, Divisor, Quotient. Fig. 8.

$$AB = AC : 7 = \frac{AC}{7} \text{ oder } a = b : 7 = \frac{b}{7}.$$

2. Aufgabe. Stelle die Aufgabe 7 in § 1 bildlich dar!

Erklärung. Die Strecke AB (a) ist in der Strecke AC (b) 7 mal enthalten. Messung. Benennungen wie 1. Fig. 8.

$$AC : AB = \frac{AC}{AB} = 7 \text{ oder } b : a = \frac{b}{a} = 7.$$

3. Uebungsstoff.

Anschauung. Fig. 9 ist anzuzeichnen. 1. Der wievielte Theil von AN ist AB , AC , DG , FK ?

2. Gieb den 3., 4., 6., 12. Theil der Strecke AN an!

3. Gieb Strecken an, die $= \frac{BH}{2}$, $\frac{DN}{3}$, $\frac{CL}{4}$ sind!

4. Wie oft ist DG in AN enthalten?

5. Wie oft sind die Strecken m , n , p in AN enthalten?

Gieb Strecken an, die 6. $= \frac{2}{3} CI$; 7. $= \frac{m + n + p}{3}$; 8. $= m + 2n + \frac{p}{3}$; 9. $= \frac{2}{3} CF + \frac{3}{4} AI$ sind!

Zeichnen. 10. (*L. C.*) Zeichne eine Strecke und theile sie in fünf gleiche Theile!

11. Zeichne eine Strecke AB und dann ihren vierten Theil!

12. Zeichne eine Strecke n und dann $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$, $\frac{n}{4}$!

13. Zeichne eine Strecke a und dann $\frac{2}{3}a$, $\frac{3}{4}a$, $\frac{3}{5}a$!

14. Zeichne eine Strecke und dann eine zweite, die in der ersten 3 mal enthalten ist!

15. Zeichne eine Strecke CD und dann eine zweite, in welcher CD 4 mal enthalten ist!

16. Zeichne zwei Strecken e und f ($e > f$) und dann Strecken, welche den folgenden Ausdrücken entsprechen: a) $\frac{e+f}{2}$; b) $3(e-f)$;

c) $2e + \frac{f}{3}$; d) $\frac{2e}{3} + \frac{3f}{4}$.

17. (*L. A.*) Zeichne eine Strecke a und dann die Strecken $2a$, $3a$, $4a$, $5a$, $6a$!

18. Zeichne fünf gleiche Strecken und theile sie dann der Reihe nach in 2, 3, 4, 5, 6 gleiche Theile!

19. Zeichne eine Strecke a und dann die Strecken $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{4}$, $\frac{a}{5}$, $\frac{a}{6}$!

20. Zeichne eine Strecke m und dann die Strecken $\frac{2m}{3}$, $\frac{3m}{4}$, $\frac{4m}{5}$!

21. Zeichne eine Strecke n und theile sie in zwei Theile, so dass der erste Theil um $\frac{n}{9}$ grösser ist als der zweite!

§ 7.

Längenmessung.

1. Erklärung. Die Strecke, mit welcher man misst, heisst Einheit oder Mass; die Zahl, welche angiebt, wie oft die Einheit in der zu messenden Strecke enthalten ist, heisst Masszahl.

Gebräuchliche Einheiten: a) das Meter (m) mit seinen Theilen und Zusammensetzungen (1 km = 10 hm; 1 hm = 10 dkm = 100 m; 1 m = 10 dm; 1 dm = 10 cm; 1 cm = 10 mm).

2. Für den praktischen Gebrauch bedient man sich der Massstäbe*, Messketten, Messschnüre, Messbänder; für annähernde Messungen des Schrittmasses, Spannmasses.

* Für das Zeichnen empfehlenswerth: die Massstäbe von Dr. Korschel in Strausberg, oder die kleinen hölzernen Lineale mit Eintheilung.

3. Uebungsstoff.

Rechnen. Für das Rechnen geben die vorhandenen Rechenbücher reichlichen Uebungsstoff.

Zeichnen. 1. (*L. M.*) Zeichne die folgenden Strecken $a = 5$ cm; $b = 4$ cm 5 mm; $c = 64$ mm!

2. Ziehe eine Strecke von 8 cm 4 mm und verkürze sie um 24 mm!

3. Zeichne eine Strecke $MN = 15$ mm und verlängere sie über N hinaus, so dass $MO = 60$ mm wird!

4. Zeichne eine Strecke $AB = 45$ mm und dann ihren fünfzehnten Theil!

5. Zeichne eine Strecke $p = 40$ mm und dann die Strecken $\frac{2p}{3}$, $\frac{3p}{4}$, $\frac{4p}{5}$!

§ 8.

Verhältniss zweier Strecken.

Uebungen im Freien und in der Klasse.

1. Miss die Länge und Breite des Schulhofes, des Schulzimmers u. s. w. (siehe Uebungsstoff) und gieb dieselben (mit Vernachlässigung der Brüche) in gemeinschaftlichem Masse an! Ist z. B. die Länge 50 m, die Breite 40 m, so sagt man: die Länge des Schulhofes verhält sich zur Breite wie 50 : 40 oder wie 5 : 4.

Erklärung. Strecken verhalten sich wie ihre Masszahlen.

Ist die Masszahl von AB (a) 5, diejenige von CD (b) in demselben Masse 3, so ist

$$AB : CD = 5 : 3; \quad a : b = 5 : 3,$$

oder auch

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5}{3}; \quad \frac{a}{b} = \frac{5}{3}.$$

2. Uebungsstoff.

Rechnen. 1. a) 1 m : 1 cm? b) 1 hm : 1 dm? c) 1 dkm : 1 dm? d) 1 km : 1 cm? e) 1 hm : 1 mm? f) 1 dm : 1 hm? g) 1 cm : 1 dm? h) 1 m : 1 dm? i) 1 cm : 1 km? k) 1 mm : 1 km?

Messen. 2. (*M.*) Wie verhält sich a) die Breite der Tischplatte zu ihrer Länge? b) die Länge der Schultafel zu ihrer Breite? c) die Breite eines Fensters zu seiner Höhe? d) die Breite der Thüre zur Länge derselben? e) die Länge des Schulzimmers zur Höhe und Breite desselben? g) die Länge des Schulgebäudes zur Breite? u. s. w., u. s. w.

3. Es sind die Dimensionen von Gegenständen des Lehrzimmers nach dem Augenmasse zu schätzen, ihre Verhältnisse anzugeben und durch Messung zu controlliren!

4. Es ist durch Vergleichung nach dem Augenmasse anzugeben, wie sich verhält: a) die Breite eines Quartblattes zur Höhe? b) die Breite des Lehrbuches zur Höhe? c) auf der Landkarte die Entfernung Berlin-Wien zur Entfernung Berlin-Moskau? u. s. w.

5. Es sind Entfernungen im Freien abzuschätzen!

Zeichnen. 6. (*L. M. C.*) Zeichne zwei Strecken a und b , gieb ihre Länge in mm und dann ihr Verhältniss an!

7. Zeichne eine Strecke AB und dann eine zweite CD , so dass $AB:CD = 2:3$!

8. Zeichne eine Strecke MN und gieb in ihr einen Punkt O an, so dass $MO:NO = 1:3$!

9. Zeichne eine Strecke AB und gieb in ihrer Verlängerung einen Punkt C an, so dass $AC:BC = 7:4$!

10. Zeichne eine Strecke RS und gieb in ihrer Verlängerung einen Punkt U an, so dass $RU:SU = 2:5$!

11. Zeichne eine Strecke von 48 mm und theile sie in zwei Abschnitte, welche sich wie 17:31 verhalten!

12. (*L. A.*) Zeichne drei ungleiche Strecken, gieb durch Abschätzung ihre Länge in mm an und prüfe das Resultat durch Messung!

Zeichne vier Strecken, von denen jede folgende 13. um die Hälfte, 14. um das Doppelte der ersten grösser als die vorhergehende ist!

15. Zeichne eine Strecke und theile sie durch einen Punkt in zwei Abschnitte, die sich wie 3:5 verhalten!

16. Zeichne eine Strecke MN und verlängere sie bis R , so dass $MN:MR = 5:8$!

17. Zeichne zwei Strecken, die den Verhältnissen: a) 2:3; b) 4:5; c) 5:6 entsprechen!

II. Die Kreislinie.

§ 9.

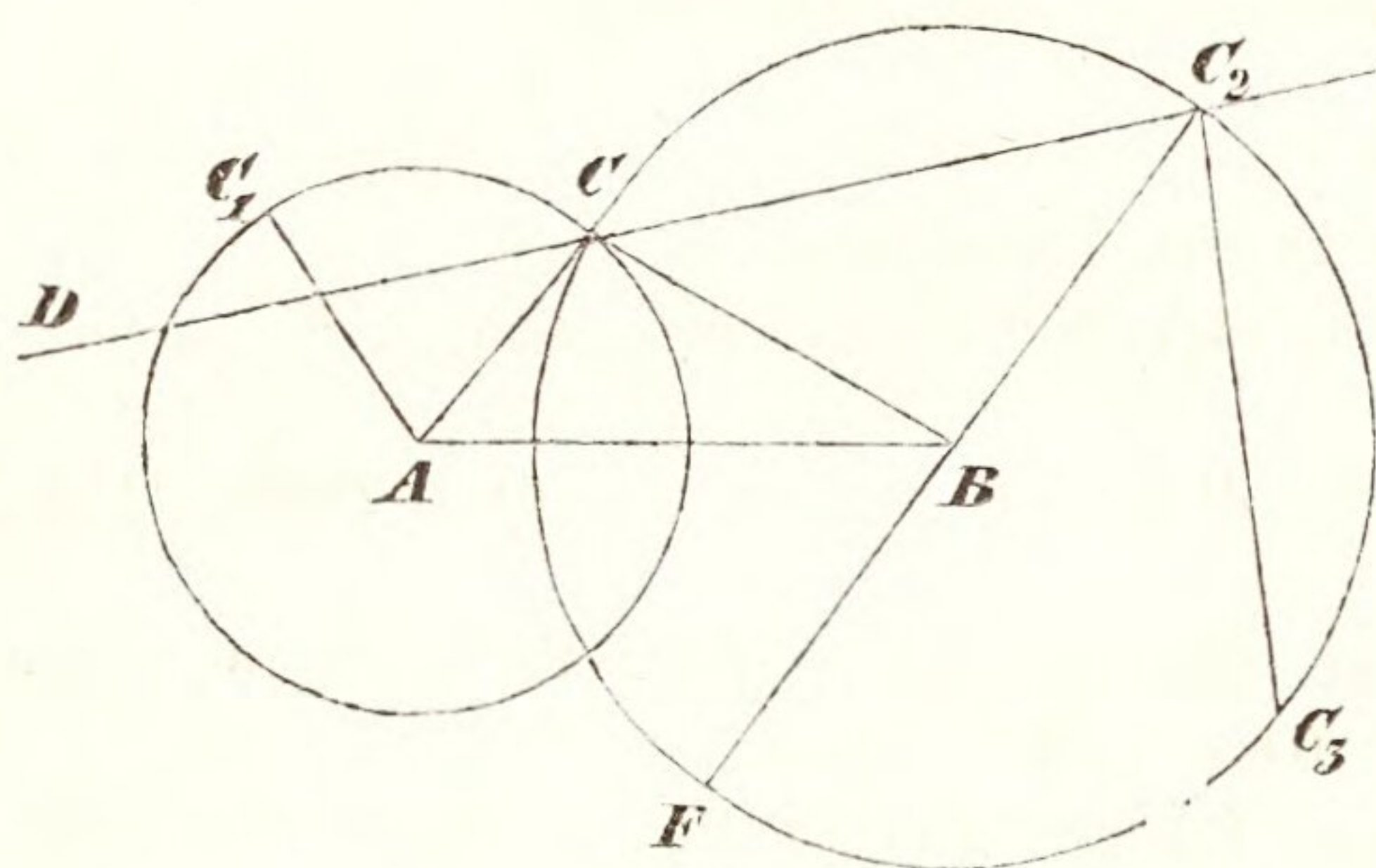
Uebungen im Freien.

Bemerkung. Sollte für das Folgende kein geeigneter Platz vorhanden sein oder die Witterung die Vornahme der Uebungen nicht gestatten, so können dieselben auch in einem Saale vorgenommen werden, indem man statt der beiden Signalstangen C_1 und C_2 zum

Traciren Kreidestücke nimmt. Im äussersten Nothfalle muss die Wandtafel aushelfen.

1. Aufgabe. Eine Strecke $AB = 20\text{ m}$ sei auf dem Schulhofe abgesteckt. Es soll ein dritter Punkt C so bestimmt werden, dass er von A 10 m , von B 15 m entfernt ist.

Fig. 10.



Zu dem Ende werden (Fig. 10) zwei Bindfäden von der vorgeschriebenen Länge mit dem einen Ende an A resp. B befestigt, während die anderen Enden an zwei Signalstangen angebunden sind. Zwei Schüler gehen mit diesen Stangen beliebig

fort, bis die Schnüre gespannt sind. Die dadurch erhaltenen Punkte C_1 , C_2 haben die verlangte Eigenschaft nur theilweise, indem z. B. C_1 zwar von A 10 m , aber nicht von B 15 m entfernt ist. Um den richtigen Punkt C zu finden, gehen die Schüler unter steter Spannung der Schnüre seitwärts so lange auf einander zu, bis die Signalstangen aneinander liegen. Die Stange C_1 ist dabei von A stets 10 m , die Stange C_2 von B stets 15 m entfernt geblieben. Lässt man während der Operation die Spitzen der Stangen sich auf der Erde eingraben, so beschreiben sie krumme Linien von den besagten Eigenschaften. Die Stangen können zweimal zum Zusammenfallen gebracht werden.

Erklärung. Eine in sich zurücklaufende krumme Linie einer Ebene, deren sämtliche Punkte von einem Punkte der Ebene gleichen Abstand haben, heisst Kreislinie; der Punkt heisst Mittelpunkt (Centrum); der gleiche Abstand heisst Halbmesser (Radius).

2. Stecke in der beiderseitigen Verlängerung von CC_2 zwei Stangen D und E ein!

Erklärung. Eine Gerade, welche den Kreis in zwei Punkten schneidet, heisst Secante.

Verbinde die Punkte C und C_2 durch eine Schnur und stecke in der Verlängerung von C_2B eine Stange F ein, welche von B ebenfalls 15 m entfernt ist.

Erklärung. Eine Strecke, welche zwei Punkte einer Kreislinie mit einander verbindet, heisst Sehne (Chorde); eine Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht, heisst Durchmesser (Diameter).

Ein Theil der Kreislinie heisst Bogen (Arcus). Jede Sehne theilt die Kreislinie in zwei Bogen; der kleinere derselben heisst der zur Sehne zugehörige.

Die Hälfte der Kreislinie heisst Halbkreis, der vierte Theil Quadrant, der sechste Theil Sextant, der achte Theil Octant.

3. Es leuchtet ohne Weiteres ein:

Grundsatz. Alle Halbmesser und alle Durchmesser eines Kreises oder gleicher Kreise sind unter sich gleich.

4. Stecke auf dem Kreise um B eine Stange C_3 so ein, dass die Sehne $CC_2 = C_2C_3$ wird, lege in die Trace der Bogen (die recht scharf eingeschnitten sein muss) zwei Bindfäden oder auch die Messkette und vergleiche die Länge der Bogen! Wiederhole dasselbe, indem du auf zwei gleichen Kreisen gleiche Sehnen abträgst!

Lehrsatz. Zu gleichen Sehnen eines Kreises oder gleicher Kreise gehören gleiche Bogen.

Aufgabe. Stecke noch einen C_2C_3 gleichen Bogen ab!

5. Tracire den Kreis mit 10 m vollständig und tracire CA und C_1A , ferner CC_1 .

Erklärungen. a) Der Theil einer Ebene, welcher von einer Kreislinie eingeschlossen wird, heisst Kreisfläche, die Kreislinie heisst dann auch wohl der Umfang oder die Peripherie der Kreisfläche.

b) Ein Theil einer Kreisfläche, welcher von zwei Radien und dem dazwischen liegenden Bogen begrenzt wird, heisst Kreisausschnitt (Sector).

c) Ein Theil einer Kreisfläche, welcher von einer Sehne und dem zugehörigen Bogen begrenzt wird, heisst Kreisabschnitt (Segment).

d) Ein Theil einer Ebene, welcher ringsum eingeschlossen ist, heisst eine ebene Figur. Die Kreisfläche ist eine ebene Figur.

§ 10.

1. Zeichne zwei Kreise mit dem gleichen Halbmesser $r =$ a) 4 cm; b) 55 mm; c) 0,072 m; d) beliebig, schneide sie aus und bringe sie zur Deckung!

Erklärung. Ebene Figuren, welche sich so auf einander legen lassen, dass ihre Grenzen vollständig zusammenfallen, (dass sie sich decken), heissen congruent (∞ , identisch, vertauschbar).

Lehrsatz. Kreise mit gleichen Radien sind congruent.

Aufgabe. Ziehe in einem der ausgeschnittenen Kreise einen Durchmesser, falte die beiden Hälften längs desselben zusammen!

Lehrsatz. Jeder Durchmesser theilt den Kreis in zwei congruente Hälften.

2. Zeichne einen Kreis (oder zwei gleiche Kreise) mit dem Durchmesser $d = 50$ mm und dann zwei Sehnen von der Länge 7 cm, schneide die zugehörigen Kreisabschnitte aus und bringe sie zur Deckung.

Lehrsatz. Zu gleichen Sehnen eines Kreises (oder gleicher Kreise) gehören gleiche Bogen und gleiche Kreisabschnitte.

3. Zeichne einen Kreis mit dem Halbmesser $r = 53$ mm, dann zwei gleiche Bogen, deren Sehnen $= 60$ mm sind, und die zugehörigen Kreisausschnitte. Schneide dieselben aus und bringe sie zur Deckung!

Lehrsatz. Zu gleichen Bogen eines Kreises (oder gleicher Kreise) gehören gleiche Kreisausschnitte.

§ 11.

Uebungsstoff.

Anschaung. 1. Wie verhält sich in demselben Kreise a) ein Radius zu einem Radius; b) ein Durchmesser zu einem Durchmesser; c) ein Durchmesser zu einem Radius?

2. Unter welcher Bedingung stimmen zwei Kreise in der Grösse überein?

3. Ein Kreis und ein Punkt liegen in derselben Ebene. Was lässt sich von der Lage des Punktes in Beziehung auf den Kreis behaupten, wenn seine Entfernung vom Mittelpunkte a) kleiner als der Halbmesser; b) gleich dem Halbmesser; c) grösser als der Halbmesser ist?

4. Auf welcher Linie muss ein Punkt liegen, wenn seine Entfernung von einem gegebenen Punkte gleich a ist?

5. Wo liegen die Punkte, deren Entfernungen von einem Punkte A gleich a und von einem Punkte B gleich b sind? Wie viele solcher Punkte giebt es?

Zeichnen. 6. (*L. C. M.*) Zeichne einen Kreis mit dem Halbmesser $r = 30$ mm und dann einen Radius, einen Durchmesser und eine Sehne von 40 mm!

7. Zeichne einen Kreis mit dem Durchmesser $d = 50$ mm und dann eine Secante!

8. Zeichne einen Kreis ($r = 26$ mm) und theile ihn zuerst in 2, dann in 6 und dann in 12 gleiche Theile!

9. Zeichne eine Strecke $AB = 60$ mm und finde dann durch Construction einen Punkt, der von A 30 mm und von B 50 mm entfernt ist!

10. Zeichne eine Strecke $CD = 50$ mm und finde dann durch Construction Punkte, welche von den Endpunkten 30 mm entfernt sind!

11. (*C.*) Wenn eine Kreislinie gegeben und die Länge ihres Halbmessers bekannt ist, wie kann man durch Construction ihren Mittelpunkt finden?

Rechnung mit Bogen.

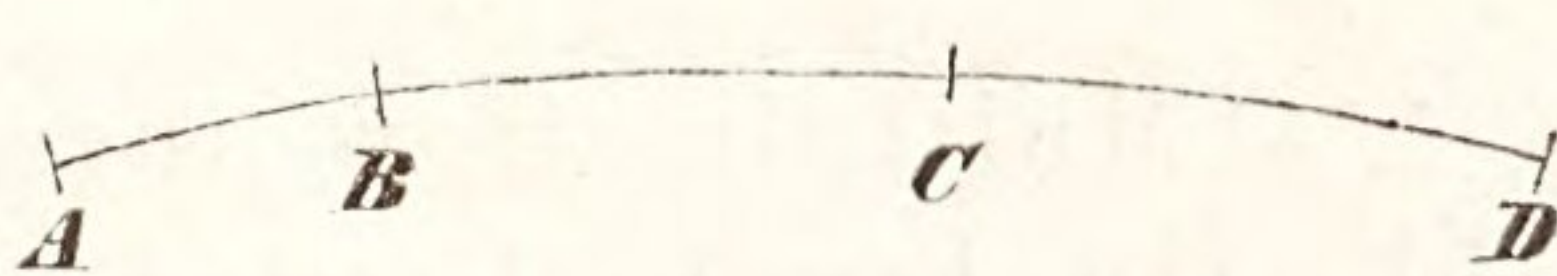
§ 12.

Addition und Subtraction von Bogen.

Fig. 11.



Fig. 12.



1. Der Bogen AB ist die Summe der beiden Bögen AC und CB . Der Bogen AC ist die Differenz der beiden Bögen AB und $\overset{\curvearrowright}{CB}$

$$\widehat{AB} = \widehat{AC} + \widehat{CB} \quad \text{oder} \quad \text{arc } AB = \text{arc } AC + \text{arc } CB.$$

$$\widehat{AC} = \widehat{AB} - \widehat{BC} \quad \text{oder} \quad \text{arc } AC = \text{arc } AB - \text{arc } BC.$$

2. **Uebungsstoff** (Fig. 12).

Anschaung. 1. Drücke jeden der Bogen AC , BD als Summe zweier Bogen aus!

2. Drücke den Bogen AD auf doppelte Art als Summe zweier Bogen aus!

3. Drücke den Bogen AD als Summe dreier Bogen aus!

4. Drücke jeden der Bogen AB , BC , CD auf doppelte Art als die Differenz zweier Bogen aus!

5. Drücke jeden der Bogen AC und BD als Differenz zweier Bogen aus!

Zeichnen. 6. (*L. C. M.*) Zeichne über $AB = 62$ mm als Durchmesser einen Halbkreis, trage die Sehnen $AC = 20$ mm, $BD = 25$ mm ein und construiere dann die Bogensumme $\widehat{AC} + \widehat{BD}$!

7. Zeichne über $CD = 60$ mm als Durchmesser einen Halbkreis, trage die Sehnen $CE = 40$ mm, $EF = 30$ mm ein und construiere dann die Differenz $\text{arc } CE - \text{arc } DF$!

8. Zeichne drei Halbkreise ($d = 50$ mm) und dann die Summe a) eines Quadranten und eines Octanten; b) eines Quadranten und eines Sextanten; c) eines Sextanten und eines Octanten!

9. Zeichne drei Kreise ($r = 20$ mm) und dann die Differenz zwischen einem a) Quadranten und Sextanten; b) Quadranten und Octanten; c) Sextanten und Octanten!

§ 13.

Multiplication und Division von Bogen.

Fig. 13.

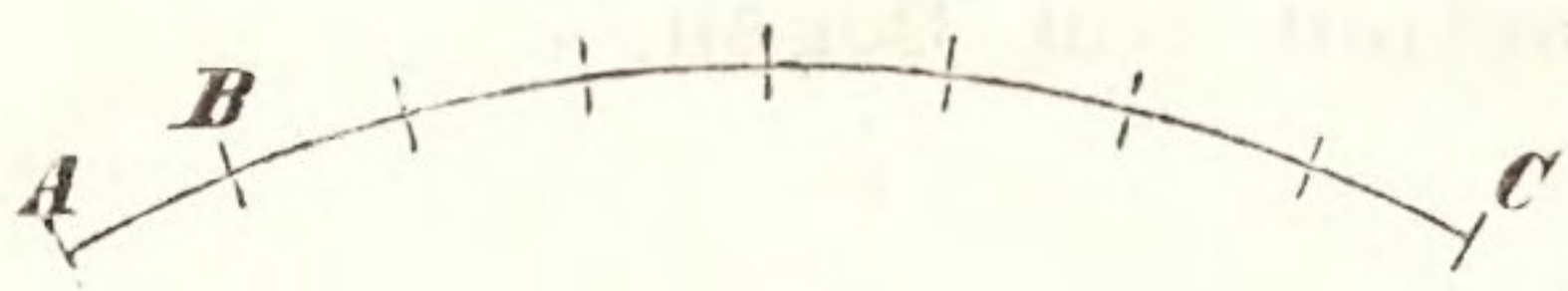
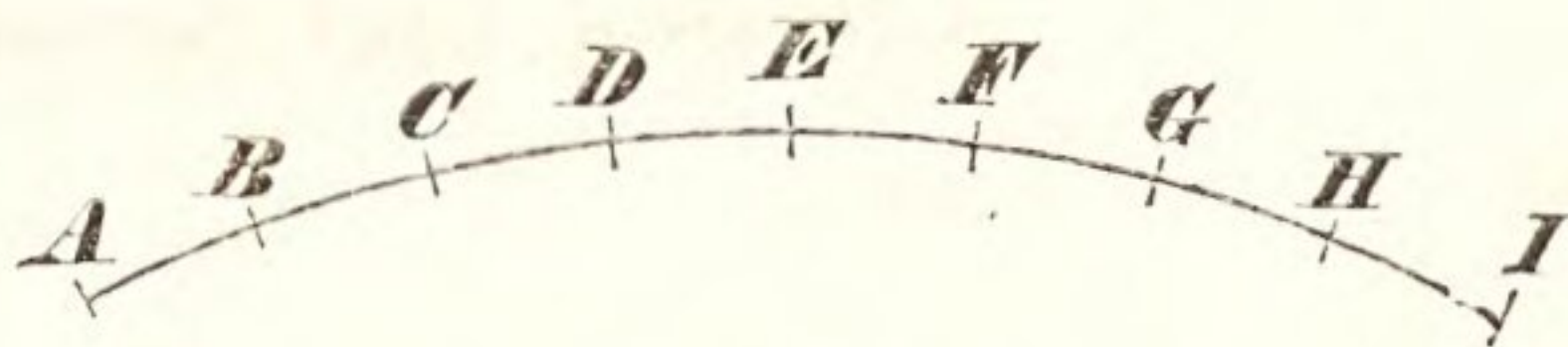


Fig. 14.



1. a) Multiplication eines Bogens mit einer ganzen Zahl. Der Bogen AC ist das Achtfache des Bogens AB (Fig. 13).

$$\widehat{AC} = 8 \widehat{AB} \quad \text{oder} \quad \text{arc } AC = 8 \cdot \text{arc } AB.$$

b) Theilung. Der Bogen AB ist der achte Theil des Bogens AC (Fig. 13).

$$\widehat{AB} = \frac{\widehat{AC}}{8} = \widehat{AC} : 8 \quad \text{oder} \quad \text{arc } AB = \frac{\text{arc } AC}{8} = \text{arc } AC : 8.$$

c) Messung. Der Bogen AB ist in dem Bogen AC achtmal enthalten (Fig. 13).

$$\frac{\widehat{AC}}{\widehat{AB}} = \widehat{AC} : \widehat{AB} = 8 \quad \text{oder} \quad \frac{\text{arc } AC}{\text{arc } AB} = \text{arc } AC : \text{arc } AB = 8.$$

2. Uebungsstoff (Fig. 14).

Anschauung. 1. Das Wievielfache des Bogens AB ist jeder der Bogen AC , BF , CI ?

2. Gieb Bogen an, die 3, 4, 5 mal so gross als der Bogen EF sind!

3. Gieb einen Bogen an, der das Doppelte der Bogensumme $\widehat{BC} + \widehat{GH}$ ist!

4. Gieb einen Bogen an, der das Dreifache der Bogendifferenz $\text{arc } AF - \text{arc } DG$ ist!

5. Der wievielte Theil des Bogens AI ist jeder der Bogen AB , BD , DH ?

6. Gieb Bogen an, die gleich $\frac{\widehat{AG}}{2}$, $\frac{\widehat{AG}}{3}$, $\frac{\widehat{AG}}{6}$ sind!

7. Wie oft ist der Bogen EH in dem Bogen AG enthalten?

8. Gieb einen Bogen an, der gleich $\frac{\widehat{AI}}{4} + \frac{\widehat{BH}}{6}$ ist!

Zeichnen. 9. (*L. C. M.*) Zeichne einen Halbkreis $r = 20$ mm, trage die Sehne $AB = 15$ mm ein und bestimme einen Punkt C derart, dass $\text{arc } AC = 4 \cdot \text{arc } AB$ ist!

10. Zeichne einen Halbkreis über dem Durchmesser $MN = 60$ mm, trage die Sehnen $MO = 8$ mm, $NP = 10$ mm ein und finde dann einen Bogen $= 3\widehat{MO} + 2\widehat{NP}$!

11. Zeichne einen Halbkreis über dem Durchmesser $AB = 60$ mm, trage die Sehnen $AC = 30$ mm, $BD = 14$ mm ein und finde dann einen Bogen $= 2 \text{ arc } AC - 3 \text{ arc } BD$!

12. Zeichne über dem Durchmesser $EF = 60$ mm einen Kreis, trage in dem einen Halbkreis die Sehne $EG = 50$ mm, in dem andern die Sehne $FH = 48$ mm ein und theile dann die Bogen EG und FH auf zwei verschiedene Arten in 12 gleiche Theile!

13. Zeichne in dem Kreise $d = 63$ mm die Sehne $AB = 30$ mm ein und finde dann die Bogen $\frac{\widehat{AB}}{4}$, $\frac{\widehat{AB}}{6}$!

14. Trage in dem Kreise $r = 20$ mm die Sehne $MN = 24$ mm ein und finde dann einen Bogen, der gleich $\frac{2}{3} \text{ arc } MN$ ist!

15. Finde in dem Kreise $r = 30$ mm einen Bogen, der in dem der Sehne $EF = 20$ mm entsprechenden Bogen 5 mal enthalten ist!

16. Construire in dem Kreise $d = 70 \text{ mm}$ den Ausdruck $\frac{2}{3} \text{ arc } AB + \frac{3}{4} \text{ arc } CD$, wenn die Sehne $AB = 50 \text{ mm}$ und die Sehne $CD = 30 \text{ mm}$ ist!

17. (L. C.) Construire in einem beliebigen Kreise ein Segment, dessen zugehöriger Bogen gleich der Summe eines Quadranten und eines Sextanten ist!

18. Construire in einem beliebigen Kreise einen Sector, dessen Bogen gleich der Differenz zwischen einem Halbkreis und einem Octanten ist?

§ 14.

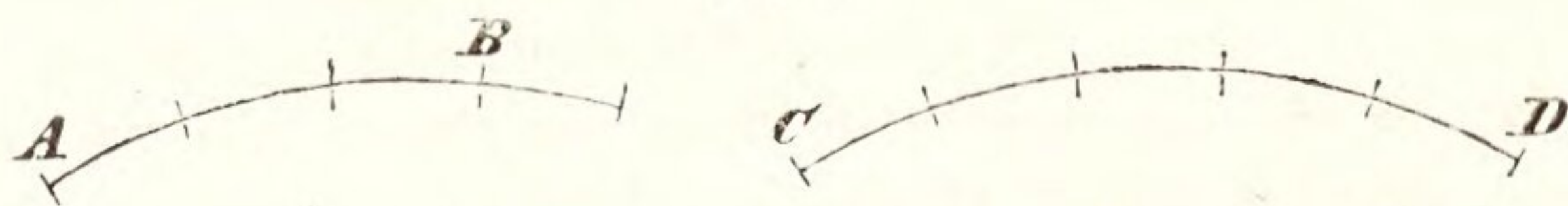
Bogenmessung. Verhältniss zweier Bogen.

1. Erklärung. Einen Bogen messen heisst zusehen, wie oft eine bekannte Strecke oder ein bekannter Bogen (von gleicher Krümmung) in ihm enthalten ist.

a) Als Längenmass nimmt man die Längeneinheit. Man denkt sich den Bogen abgewickelt in eine gerade Linie, so dass er als Strecke angesehen werden kann. Die Masszahl heisst die Masszahl im Längenmass. (Der Lehrer hat einen grossen Bogen von Pappdeckel oder Holz, über welchen vor den Augen der Schüler ein Bindfaden gespannt wird; die Länge desselben wird gemessen.)

b) Als Bogenmass nimmt man einen Bogen von gleicher Krümmung (von demselben oder einem gleichen Kreise), und zwar dient als Einheit der 360. Theil des Kreises. Derselbe heisst Bogengrad ($^{\circ}$). Der Bogengrad wird eingetheilt in 60 Bogenminuten ($'$) und die Bogenminute in 60 Bogensecunden ($''$). Die Masszahl heisst Masszahl im Bogenmasse. (Ein Bogen von Pappdeckel von bekanntem Radius ist vorrätig. Ein Kreis mit gleichem Radius wird an die Tafel gezeichnet und mit jenem Bogen ein beliebiger Bogen des Kreises gemessen. Ein in den meisten Fällen übrig bleibender Rest führt dann auf die Nothwendigkeit der weiteren Eintheilung.)

Fig. 15.



2. Erklärung. Unter dem Verhältnisse zweier Bogen versteht man das Verhältniss ihrer Masszahlen (im Bogenmasse).

$$\widehat{AB} : \widehat{CD} = 3 : 5; \quad \text{arc } AB : \text{arc } CD = 3 : 5.$$

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{CD}} = 3 : 5; \quad \frac{\text{arc } AB}{\text{arc } CD} = 3 : 5.$$

3.

Uebungsstoff.

Rechnen. 1. Gieb einen Halbkreis, Quadranten, Octanten, Sextanten im Bogenmasse an!

2. Gieb den 5., 6., 8., 10., 12., 20. und 30. Theil der Peripherie im Bogenmasse an!

3. a) $15^{\circ} 4' = x'$; b) $12' 35'' = x''$; c) $43^{\circ} 15'' = x''$; d) $13^{\circ} 2' 15'' = x''$; e) $175^{\circ} 54' 23'' = x''$.

4. Gieb die folgenden Bogen in $^{\circ}$, $'$, $''$ an: a) $\text{arc } AB = 775''$; b) $\text{arc } CD = 1540''$; c) $\text{arc } EF = 20415''$!

5. Gieb die Summe eines Quadranten, Sextanten und Octanten im Bogenmasse an!

6. Berechne die Summe: $x = \text{arc } AB + \text{arc } CD + \text{arc } EF$! $\widehat{AB} = 45^{\circ}$; $62'$; $40^{\circ} 51'$; $16^{\circ} 14' 23''$; $33,479^{\circ}$; $\widehat{CD} = 60^{\circ}$; $54'$; $36^{\circ} 12'$; $42^{\circ} 0' 52''$; $4,034^{\circ}$; $\widehat{EF} = 35^{\circ}$; $17'$; $74^{\circ} 32'$; $44^{\circ} 3' 57''$; $17,34^{\circ}$.

7. Gieb die Differenz zwischen einem Sextanten und einem Octanten im Bogenmasse an!

8. Berechne die Differenz $x = \widehat{MN} - \widehat{OP}$! $\widehat{MN} = 75^{\circ}$; $123'$; $120^{\circ} 34'$; $72^{\circ} 4' 15''$; $37,45''$; $\widehat{OP} = 15^{\circ}$; 64° ; $73^{\circ} 12'$; $63^{\circ} 16' 45''$; $13,047^{\circ}$.

9. Berechne a) $5 \cdot \text{arc } AB$; b) $11 \cdot \text{arc } CD$; c) $25 \cdot \widehat{EF}$! $\text{arc } AB = 72^{\circ}$; 128° ; $72^{\circ} 12'$; $36^{\circ} 13' 4''$; $4,325^{\circ}$; $\text{arc } CD = 32^{\circ}$; 35° ; $36^{\circ} 32'$; $42^{\circ} 0' 52''$; $7,432^{\circ}$; $\widehat{EF} = 12^{\circ}$; 29° ; $40^{\circ} 51'$; $16^{\circ} 3' 57''$; $17,304^{\circ}$.

10. Um wieviel Bogengrade ist das Fünffache eines Octanten grösser als das Dreifache eines Sextanten?

11. Berechne von $\widehat{RS}$ den a) 5.; b) 12.; c) 20. Theil! $\widehat{RS} = 120^{\circ}$; 172° ; $72^{\circ} 48'$; $70^{\circ} 13' 4''$; $43,405^{\circ}$.

12. Wie oft ist das Dreifache eines Sextanten in dem Zwölffachen eines Octanten enthalten?

13. Wie oft ist $\text{arc } AB$ in $\text{arc } CD$ enthalten? $\text{arc } AB = 54^{\circ}$; $37'$; $12^{\circ} 48'$; $70^{\circ} 13' 4''$; $14,325^{\circ}$; $\text{arc } CD = 162^{\circ}$; $259'$; $153^{\circ} 36'$; $772^{\circ} 23' 44''$; $186,225^{\circ}$.

14. Dividire $\widehat{MN}$ durch $\widehat{OP}$! $\widehat{MN} = 256^{\circ}$; $323'$; $106^{\circ} 31'$; $182^{\circ} 40' 5''$; $411,75^{\circ}$; $\widehat{OP} = 32^{\circ}$; $17'$; $15^{\circ} 13'$; $14^{\circ} 3' 5''$; $16,47^{\circ}$.

15. Berechne die folgenden Ausdrücke: a) $x = \frac{\text{arc } AB + \text{arc } CD}{3}$; b) $x = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD} + \widehat{EF}}{5}$; c) $x = \frac{3}{4} \text{arc } AB + \frac{5}{6} \text{arc } CD$! $\text{arc } AB = 151^{\circ}$; $75'$; $48^{\circ} 45'$; $184^{\circ} 16' 5''$; $41,58^{\circ}$; $\text{arc } CD = 41^{\circ}$; $15'$; $16^{\circ} 35'$; $73^{\circ} 4' 50''$; $32,407^{\circ}$; $\text{arc } EF = 70^{\circ}$; $143'$; $72^{\circ} 15'$; $13^{\circ} 0' 15''$; $7,31^{\circ}$.

16. Gieb für die Grössen: Peripherie (p), Halbkreis (h), Quadrant (q), Sextant (s), Octant (o) die folgenden Verhältnisse in Zahlen an! a) $p:h$, $p:q$, $p:s$, $p:o$; b) $h:p$, $h:q$, $h:s$, $h:o$; c) $q:p$, $q:h$, $q:o$; d) $s:p$, $s:h$; e) $o:p$, $o:h$, $o:s$.

17. Gieb das Verhältniss zwischen dem dritten Theil des Octanten und dem fünften Theil des Sextanten in Zahlen an!

Anschaung und Rechnen. 18. In wieviel gleiche Theile ist die Kreislinie auf dem Zifferblatte einer Uhr eingetheilt? Gieb das Bogenmass eines solchen Theiles an!

19. Wie gross ist der Bogen, den die Spitze des Minutenzeigers beschreibt a) in einer Stunde; b) in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ Stunden; c) in 5, 10, 20, 45 Zeitminuten?

20. Wie gross ist der Bogen, den die Spitze des Stundenzeigers beschreibt a) in 1, 3, 6, 8, 13 Stunden; b) in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ Stunden; c) in 1, 5, 10, 45 Zeitminuten?

21. In welcher Zeit beschreibt die Spitze des Minutenzeigers einen Bogen von a) 270° ; b) 45° ; c) 18° ?

22. In welcher Zeit beschreibt die Spitze des Stundenzeigers einen Bogen von a) 30° ; b) 75° ; c) 126° ?

23. Wie verhalten sich die Bogen, welche die Spitzen des Minuten- und Secundenzeigers in derselben Zeit beschreiben?

Zeichnen. 24. (C.) Zeichne die folgenden Bogen ($r = 0,03 \text{ m}$) a) $\text{arc } AB = 30^\circ (= \frac{60^\circ}{2})$; b) $\text{arc } CD = 15^\circ (\frac{60^\circ}{4} = 45^\circ - 30^\circ)$; c) $\text{arc } EF = 75^\circ (= 45^\circ + 30^\circ)$; d) $\text{arc } GH = 105^\circ (= 90^\circ + 15^\circ)$; e) $\text{arc } IK = 135^\circ (= 180^\circ - 45^\circ)$!

III. Der Winkel.

Vorbemerkung. Der Lehrer wird zu den in den nächsten Paragraphen folgenden Aufgaben stets passendes Terrain vorfinden. In den meisten Fällen wird der etwas geräumige Schulhof genügen; im anderen Falle ist eine Excursion nach einem geeigneten Platze zu unternehmen. Es ist zwar wünschenswerth, dass die Unzugänglichkeit thatsächlich vorhanden sei, jedoch genügt es auch, dieselbe zu fingiren. Zu empfehlen ist es, die zu einem Paragraphen gehörigen Aufgaben vorher in der Klasse zu besprechen und durch Zeichnung an der Tafel zu erläutern.

Sollten Umstände es verhindern, diese das Interesse der Knaben weckenden und die Entwicklung des Begriffs „Winkel“ fördernden praktischen Uebungen vorzunehmen, so übergehe man die §§ 15, 16, 17 und 20 und fahre direct mit § 18 fort.

Messung unzugänglicher Entfernungen.

Uebungen im Freien.

§ 15.

1. Aufgabe. Von drei Punkten, deren Entfernungen im Terrain gemessen sind, einen Plan zu zeichnen.

Lösung: Da man die Entfernungen in den wirklichen Grössen nicht zeichnen kann, so muss man ein verkleinertes Bild derselben zeichnen und zwar so, dass Alles in demselben Verhältnisse kleiner wird. Zu dem Ende zeichnet man zunächst einen Massstab, der ein gewisses Mass, etwa 1 dkm vorstellt, theilt ihn in seine Unterabtheilungen und trägt die diesem Massstabe entnommenen Entfernungen (nach § 9) in die Zeichnung ein.

Erklärung. Ein Massstab, dessen Theile alle in demselben Verhältniss kleiner sind, als die wirklichen Masse, heisst ein verjüngter Massstab. Die Grösse der Verjüngung wird durch das beigesetzte Verhältniss ausgedrückt. Giebt man z. B. jedem Meter im Terrain die Länge von 2 mm in der Zeichnung, so ist das Verhältniss 1:500, d. h. jede Entfernung ist in Wirklichkeit 500mal so gross als in der Zeichnung.

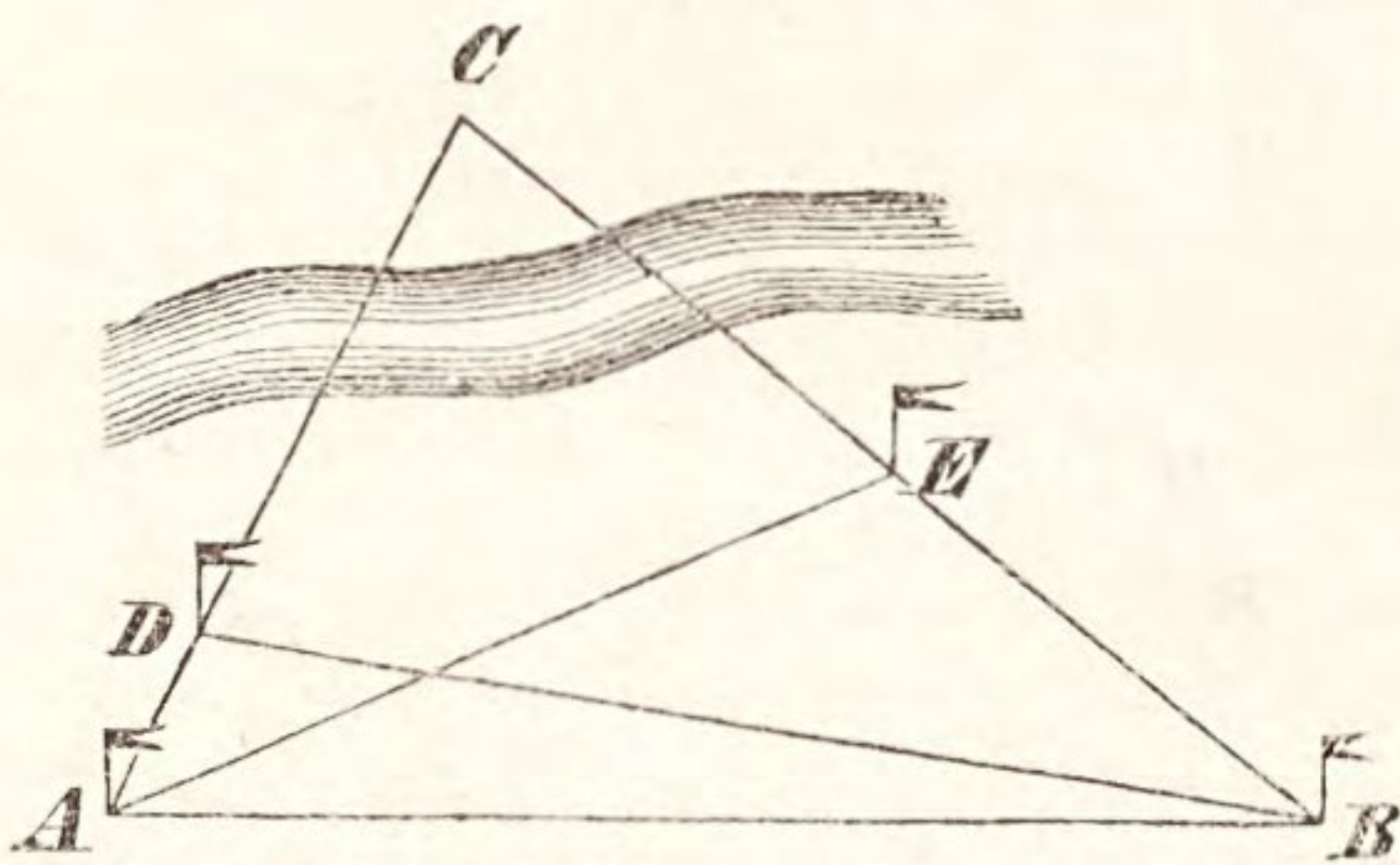
Eine in verjüngtem Massstabe ausgeführte Zeichnung einer Gegend heisst ein Plan oder eine Karte derselben. (Beispiele: die Karten im Atlas.)

2. Aufgabe. Die Entfernung zweier Terrainpunkte zu messen, von denen der eine unzugänglich ist.

Lösung (Figur 16). Sind A und C die Punkte, so steckt man zunächst eine Standlinie AB ab. Es handelt sich um Zeichnung der Linien AC und BC . Da C unzugänglich ist, so müssen die Richtungen auf andere Art festgelegt werden. Wir fixiren sie im Terrain, indem wir in D und E Stangen in die Richtungen AC

und BC einvisiren. Nach Messung der Entfernungen AE , BE , AD , BD lassen sich dann die Punkte A , B , E , D , also auch C in verjüngtem Massstabe zeichnen und AC messen.

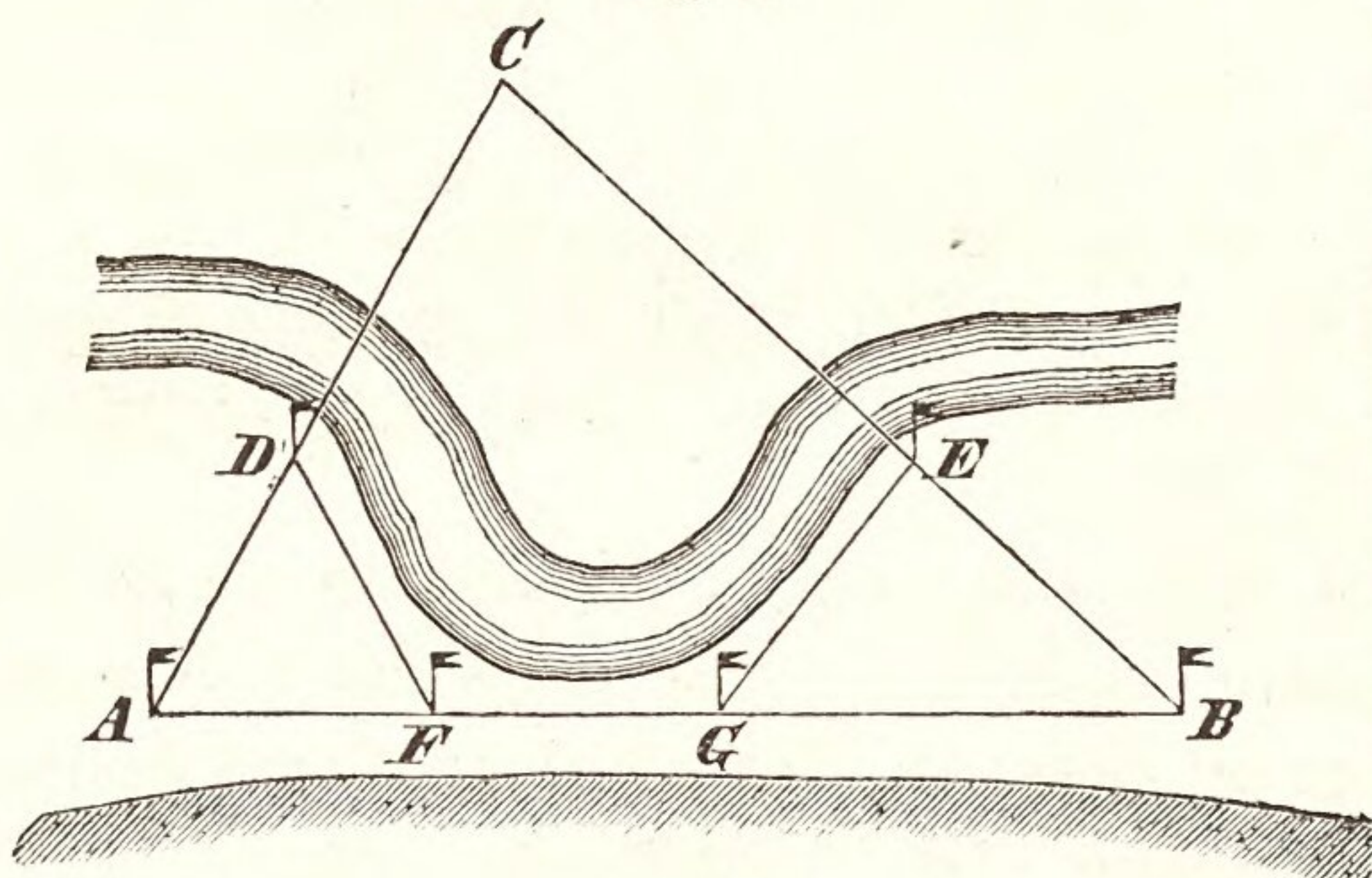
Fig. 16.



§ 16.

1. Aufgabe. Die Entfernung zweier Terrainpunkte zu messen, von denen der eine unzugänglich ist, wenn ausserdem das Messen der Entfernungen AE und BD (Fig. 17) unmöglich oder mit Umständlichkeit verknüpft ist.

Fig. 17.



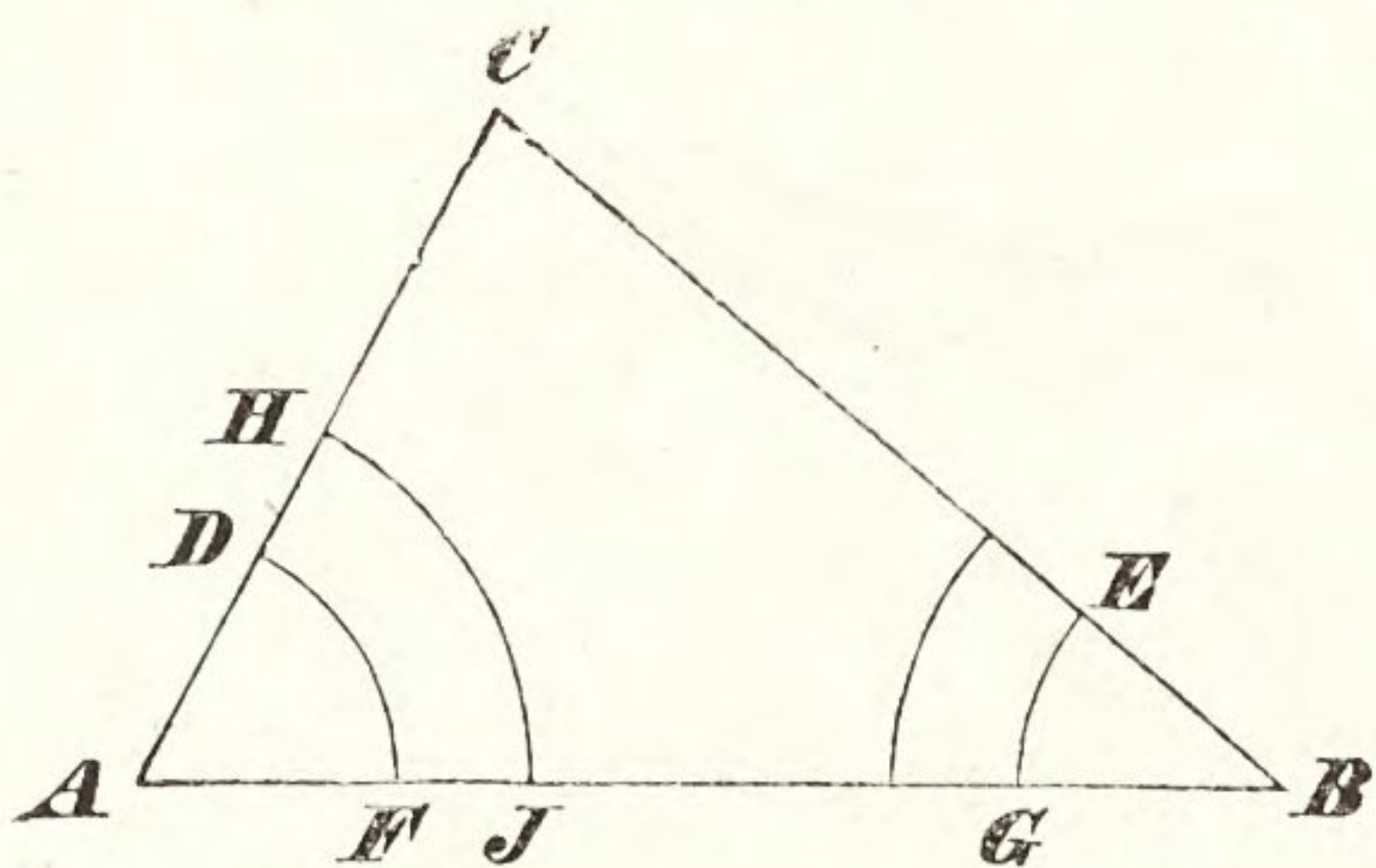
1^{te} Lösung (Fig. 17).

Man steckt auf der alten Standlinie AB zwei neue AF und BG so ab, dass durch sie die Punkte D und E fixirt werden können. Als dann lassen sich, nachdem die betreffenden Entfernungen gemessen sind, erst die Punkte A, B, F, G , dann nach dem Früheren D und E ,

also auch endlich C zeichnen und AC messen.

2^{te} Lösung. Da die Entfernungen AF, AD, BE, BG beliebig sind, so vereinfacht sich die Ausführung, wenn man sie als gleich annimmt. Am einfachsten geschieht dies in der Praxis dadurch, dass man zuerst AD beliebig absteckt, dann die beiden Stangen durch einen Bindfaden zusammenbindet, D herausnimmt und (nachdem sie durch eine andere ersetzt ist) unter steter Spannung des Fadens mit ihr fortgeht, bis die Stange in die Richtung von AB gelangt ist; dann beide zusammengebundenen Stangen herausnimmt, durch andere ersetzt und endlich in B in derselben Weise mit ihnen verfährt.

Fig. 18.



2. Nimmt man ursprünglich eine andere Länge AH und die übrigen eben so lang (Fig. 18), so macht die Schnur AH beim Gange nach J dieselbe Drehung wie die Schnur AD bei der Bewegung nach F . Die Masszahl des Bogens DF im Bogenmasse ist also dieselbe wie die des Bogens HJ .

Aufgabe. Zeichne einen Quadranten, Sextanten, Octanten, verlängere die begrenzenden Radien, schlage einen beliebigen anderen concentrischen Kreis (mit demselben Mittelpunkte), und überzeuge dich

durch Messen, dass die zwischen den Radien liegenden Bogen wieder resp. Quadrant, Sextant, Octant sind!

Grundsatz. Schlägt man um denselben Punkt mehrere Kreise und zieht zwei Radien, so haben alle zwischenliegenden Bogen dieselbe Masszahl im Bogenmasse.

§ 17.

3^{te} Lösung von Aufgabe in § 16. Man verfährt wie bei der vorigen Lösung, aber anstatt die Sehnen zu messen, misst man die Gradzahl der Bogen. Zu dem Ende würde es nöthig sein, die Kreise im Terrain zu vervollständigen und dann zuzusehen, wie oft der Bogen im ganzen Kreise enthalten ist. Da dies aber zu umständlich und in vielen Fällen nicht durchführbar ist, so hat man ein Instrument construirt, welches die Ausführung ermöglicht. Es besteht im Wesentlichen aus einer ebenen Fläche, die sich auf einem Gestell horizontal aufstellen lässt (also einen Theil des Terrains vorstellt) und auf welcher ein Kreis oder ein Theil eines Kreises mit seiner Gradeintheilung gezeichnet ist (Horizontalkreis). Es handelt sich nun noch darum, für die zusammengebundenen Stangen *AD* (siehe § 16) einen Ersatz zu bekommen. Zu dem Ende ist im Mittelpunkte der Kreistheilung ein Stift (Centrumstift) eingesetzt, um welchen sich ein mit Visirvorrichtungen versehenes Lineal (Diopterlineal)* drehen lässt. Die beiden Diopter ersetzen dann die beiden Stangen *A* und *D*. An die Stelle der umständlichen Drehung der beiden Stangen tritt jetzt die bequeme Drehung des Lineals. Die Gradzahl wird nun direct abgelesen. Steht z. B., wenn das Lineal in die Richtung *AB* gebracht ist, der Index auf 35 und rückt er dann bei der Drehung des Lineals in die Richtung *AD* auf die Zahl 70, so hat dasselbe bei der Drehung

* Das Diopterlineal hat zwei senkrechte Arme, die der Länge nach in zwei Theile getheilt sind. Der eine Theil ist in der Mitte mit einem kleinen Sehloch versehen, der andere Theil dagegen ist durchbrochen und hat einen senkrechten Faden. Dem Loche des einen Armes steht der Faden des anderen gegenüber. Zur genaueren Ablesung ist das Lineal mit einem Index versehen. Zu empfehlen für die vorliegenden und auch für weitergehende (trigonometrische) Zwecke ist der „Messknecht“ von Max. Rob. Pressler, Professor an der Akademie Tharandt, nebst Zubehör. Derselbe ist verhältnissmässig so billig, dass ihn jede Schule beschaffen kann. Sollte das aber nicht angehen und kein anderer Messapparat vorhanden sein, so kann eine Kreistheilung auf Pappe, welche auf einen Tisch gelegt wird, für vorliegenden Zweck hinreichenden Ersatz bieten. Das Diopterlineal ist dann zu ersetzen durch ein gewöhnliches Lineal, an dessen beiden Enden senkrecht zwei Nadeln (als Diopter) eingesteckt werden.

die Zahlen von 35 bis 70 durchlaufen, also einen Bogen von 35° beschrieben.

§ 18.

Zeichnung von Lösung 3 (§ 17). Der Transporteur.

Um die in Lösung 3 gemessenen Bogen zu zeichnen, müsste man ohne Hilfsmittel so verfahren: Man zeichnet mit dem gemessenen Radius im verjüngten Massstabe einen ganzen Kreis, theilt denselben in 360 Theile und nimmt soviel davon, als die gemessene Gradzahl beträgt. Dieses Verfahren würde sehr zeitraubend sein und doch nur ungenaue Resultate geben. Um die Zeichnung zu erleichtern, hat man daher ein Instrument erfunden, den Transporteur.

Der Transporteur ist ein genau in 180° getheilter Halbkreis, dessen mittlerer Theil durchbrochen ist.

Die Eintheilung ist hier also schon ein für allemal gemacht und braucht nur an die betreffende Stelle gelegt zu werden.

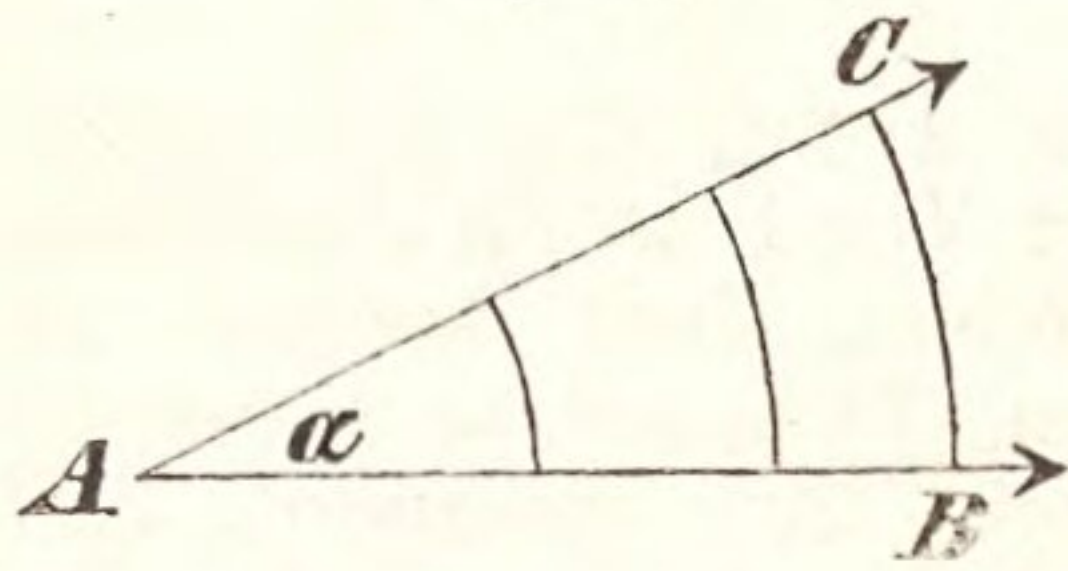
Anmerkung. Für das Zeichnen an der Tafel muss ein grosser Transporteur (aus Pappe leicht anzufertigen) vorhanden sein, dessen Theilzahlen weithin sichtbar sind.

§ 19.

Folgerungen aus den Lösungen der Aufgaben in § 16. Der Winkel.

Nach § 16, 2 ist die Gradzahl der zwischen AB und AC (Fig. 19) beschriebenen Bogen immer dieselbe. (Für jeden Punkt der gedrehten Geraden ist der Bogen immer der eben so vielte Theil vom ganzen Kreise, wie die Drehung von einer ganzen Umdrehung.)

Fig. 19.



Erklärung. Zwei von einem Punkte ausgehende Halbstrahlen bilden einen Winkel. Der Punkt heisst Scheitelpunkt, die Halbstrahlen heissen Schenkel des Winkels.

(Bezeichnung: $\angle ABC$, $\angle BAC$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAC}$, $\angle A$, $\hat{A}$, $\angle \alpha$, $\hat{\alpha}^*$,
Fig. 19.)

* Die griechischen Buchstaben: α Alpha, β Beta, γ Gamma, δ Delta, ε Epsilon, ζ Zeta, η Eta, ϑ Theta, ι Jota, κ Kappa, λ Lambda, μ My, ν Ny, ξ Xi, $\omicron$ Omikron, π Pi, ρ Rho, σ Sigma, τ Tau, υ Ypsilon, φ Phi, χ Chi, ψ Psi, ω Omega.

Unter Grösse des Winkels versteht man die Grösse der Drehung, welche ein Schenkel machen muss, um in die Lage des anderen zu kommen.

Da diese Grösse gemessen wird durch die Gradzahl der zwischenliegenden, um den Scheitel beschriebenen Bogen, so benennt man die Winkel nach dieser Gradzahl. Ein Winkel von 30° ist ein Winkel, dessen Bogen die Grösse von 30° haben.

In Beziehung auf einen um den Scheitelpunkt zwischen den Schenkeln beschriebenen Bogen heisst ein Winkel Centriwinkel. ($\hat{A}$ ist Centriwinkel zu $\widehat{BC}$.)

Wegen der gleichen Drehung ist ohne Weiteres einleuchtend:

Grundsätze. a) Zu gleichen Bogen eines Kreises oder gleicher Kreise gehören gleiche Centriwinkel.

b) Zu gleichen Centriwinkeln eines Kreises oder gleicher Kreise gehören gleiche Bogen.

Folgerung. Jeder Winkel lässt sich als Centriwinkel auffassen.

Zusammenfassung von Lösung 3, § 17. Die Manipulationen bei der gedachten Lösung lassen sich jetzt kurz so zusammenfassen: Man misst die Standlinie AB und die beiden Winkel A und B .

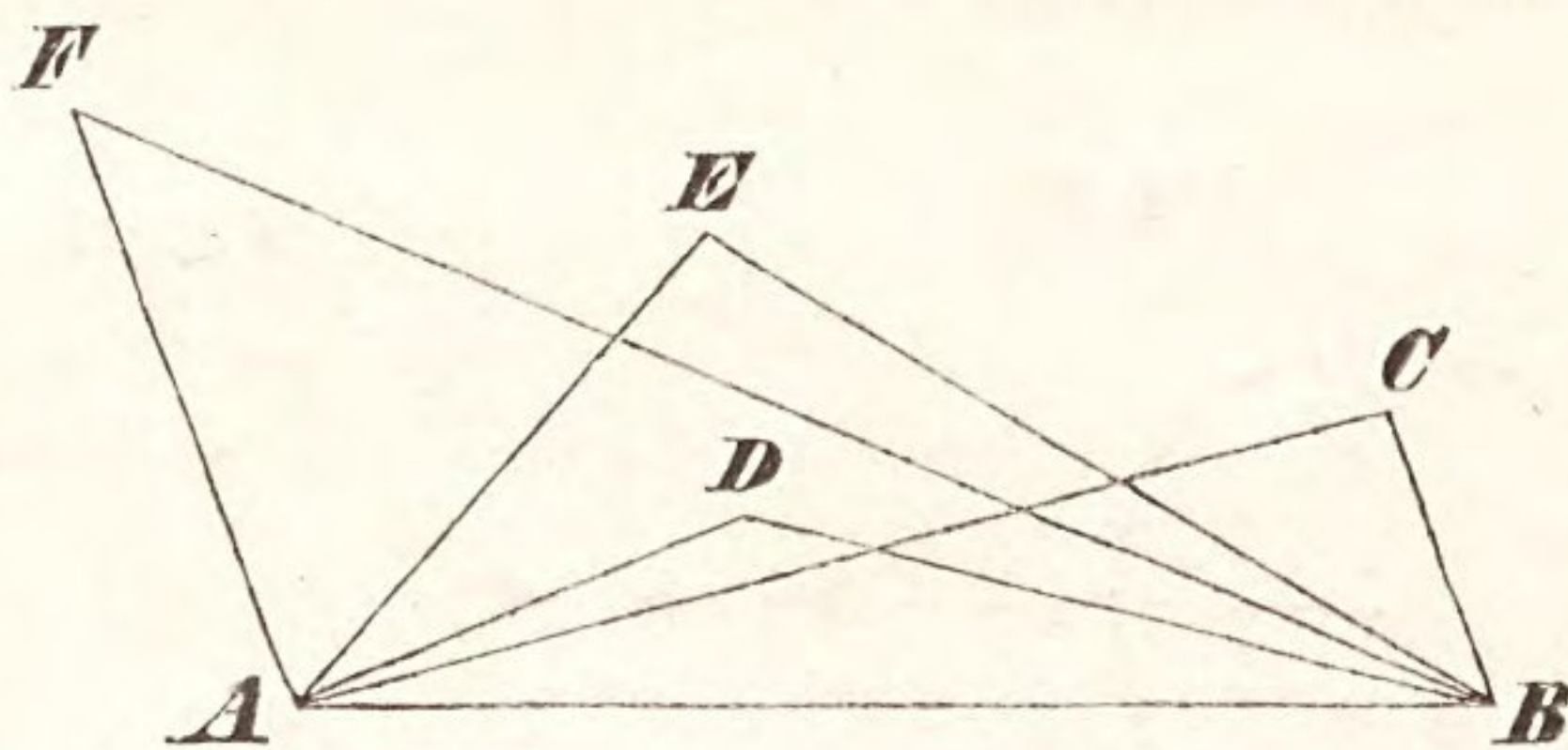
§ 20.

Uebungen im Freien.

Aufgabe. Den Plan einer Gegend zu zeichnen.

Lösung. Um die Terrainpunkte C, D, E, F zu zeichnen, steckt man zunächst eine Standlinie AB ab und misst dieselbe. Sodann visirt man von A aus nach den Punkten C, D, E, F und misst die entsprechenden Winkel (gegen AB); ebenso verfährt man in B ; endlich zeichnet man das Ganze im verjüngten Massstabe.

Fig. 20.



Anmerkung. Vor der Excursion muss eine Skizze der zu zeichnenden Gegend (Schulhof u. s. w.) an die Wandtafel gezeichnet und von jedem Schüler in sein Notizbuch copirt werden. Die einzelnen Punkte werden übereinstimmend mit Buchstaben bezeichnet, um draussen die Masse rasch und kurz notiren zu können.

§ 21.

Eintheilung der Winkel.

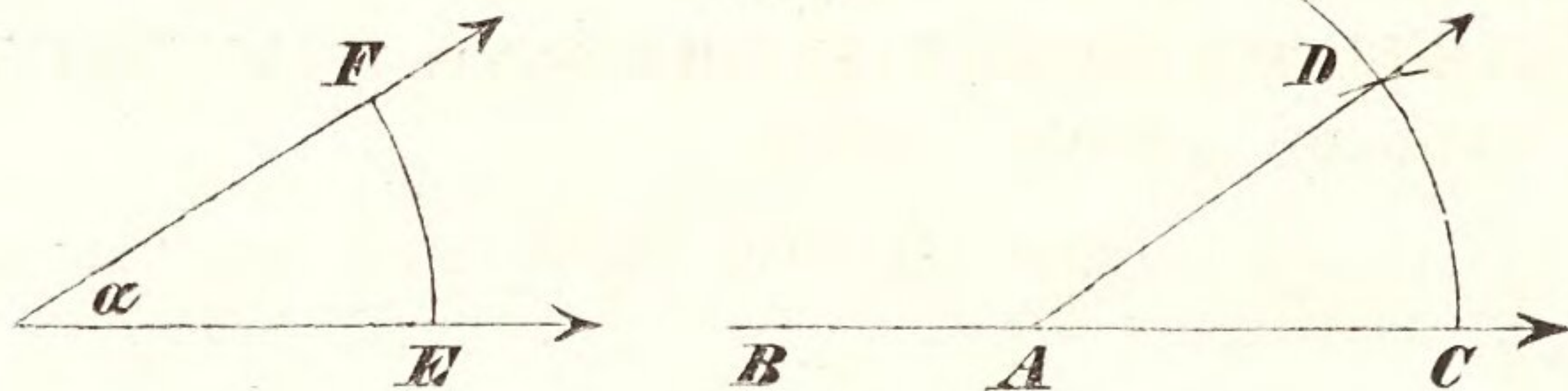
1. Die Grösse eines Winkels hängt nach dem Früheren nicht von der Länge der Schenkel ab. Drehungen von Graden, durch welche Winkel gebildet werden, bemerken wir am Uhrzeiger, an der Magnetnadel, an den Balken und dem Zeiger einer Wage, am Uhrpendel u. s. w.

Durch die Grösse eines Winkels wird die Grösse der Richtungsverschiedenheit zweier von einem Punkte ausgehenden Halbstrahlen bestimmt.

Winkel können gleich oder ungleich sein.

Grundsatz. Gleiche Winkel können so auf einander gelegt werden, dass sie sich vollständig decken.

Fig. 21.



Aufgabe. (L. C.) Einen gegebenen Winkel ($\hat{\alpha}$) an eine Gerade (BC) in einem Punkte (A) derselben anzutragen.

Lösung (Fig. 21). Man construirt mittels der gleichen Sehnen CD und EF einen gleichen Centriwinkel.

2. Dreht man von zwei Halbstrahlen, welche sich zunächst decken, den einen um den Endpunkt herum, so beschreibt derselbe alle Winkel von 0 bis 360° .

Fig. 24.

Fig. 22.

Fig. 23.

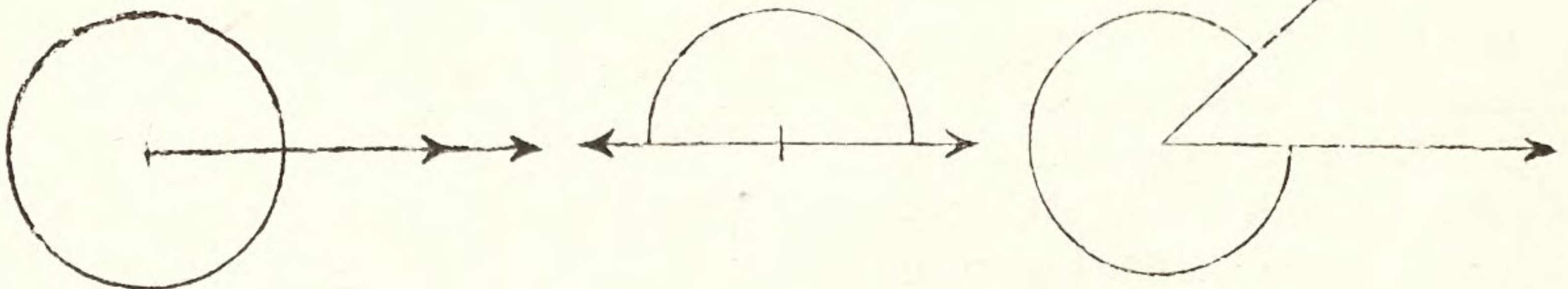
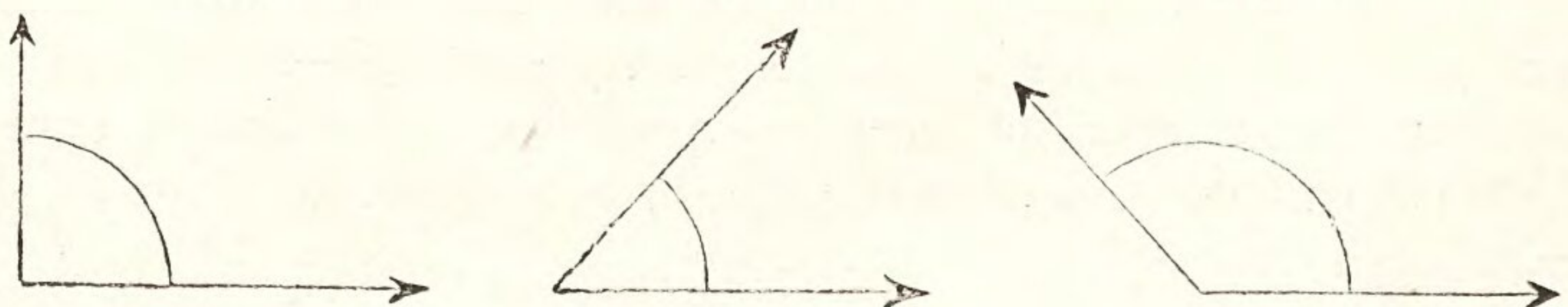


Fig. 25.

Fig. 26.

Fig. 27.



Erklärung. Ein Winkel von 360° (eine ganze Umdrehung) heisst ein completer oder voller (Voll-) Winkel (Fig. 22). Ein Winkel von 180° (eine halbe Umdrehung) heisst ein gerader oder gestreckter oder flacher Winkel (Fig. 23). Ist ein Winkel kleiner als ein gestreckter Winkel, so heisst er hohl oder concav (Fig. 25, 26, 27); ist er dagegen grösser als ein gestreckter Winkel, so heisst er erhaben oder convex (Fig. 24).

Die hohlen Winkel sind entweder rechte Winkel ($R = 90^\circ = \frac{1}{4}$ Umdrehung, Fig. 25) oder spitze ($< R$, Fig. 26), oder stumpfe Winkel ($> R$, Fig. 27).

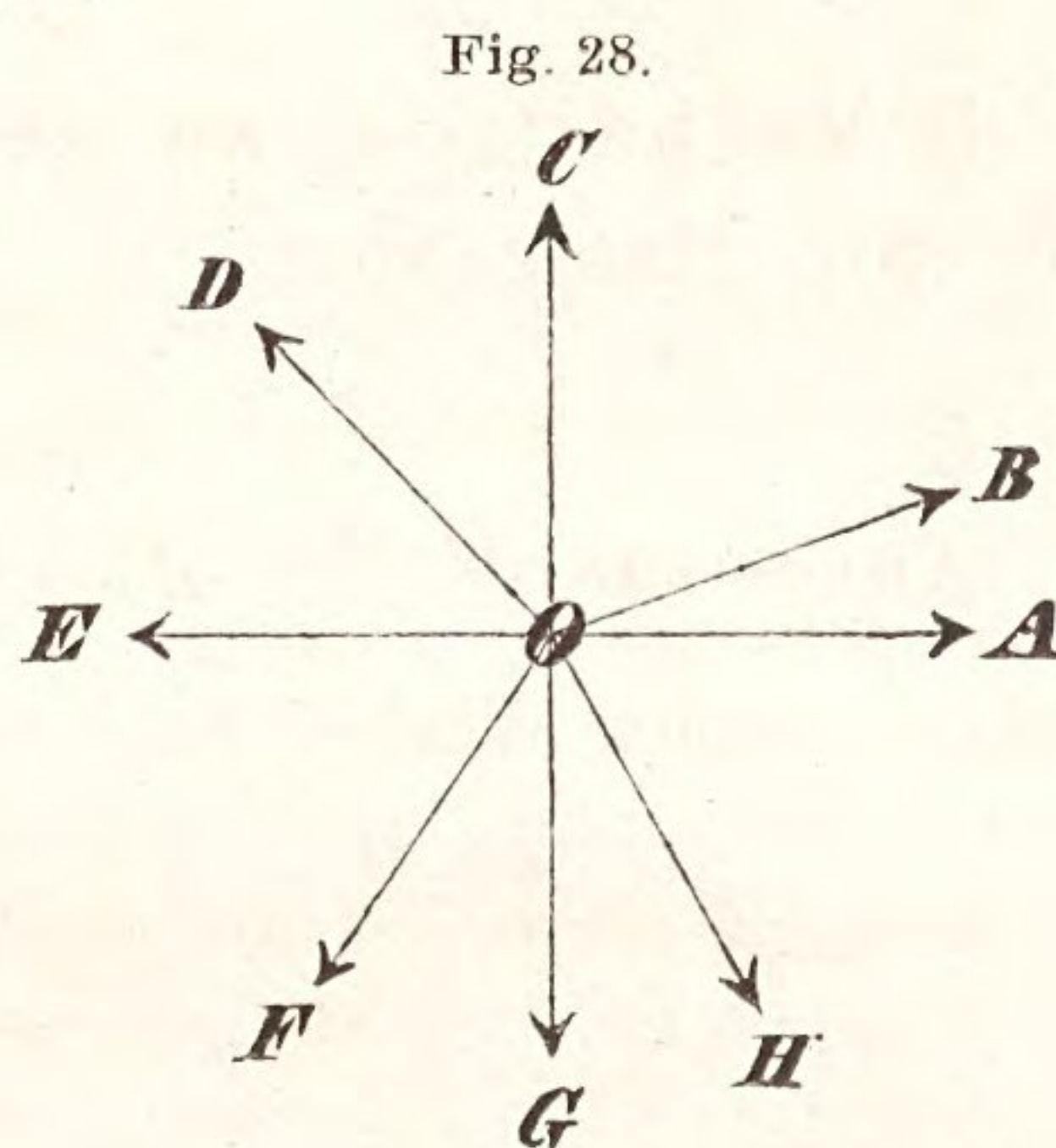
3. Zu jedem hohlen Winkel gehört ein erhabener Winkel, welcher mit ihm zusammen $4R$ beträgt.

4. Uebungsstoff.

Anschauung (Fig. 28). 1. Nenne einen a) gestreckten, b) concaven, c) convexen, d) rechten, e) spitzen, f) stumpfen Winkel!

Zeichnen. 2. (L. A.) Zeichne einen a) gestreckten, b) hohlen, c) erhabenen, d) rechten, e) spitzen, f) stumpfen Winkel!

3. Zeichne einen spitzen Winkel und dann einen a) ihm gleichen, b) grösseren, c) kleineren Winkel!



§ 22.

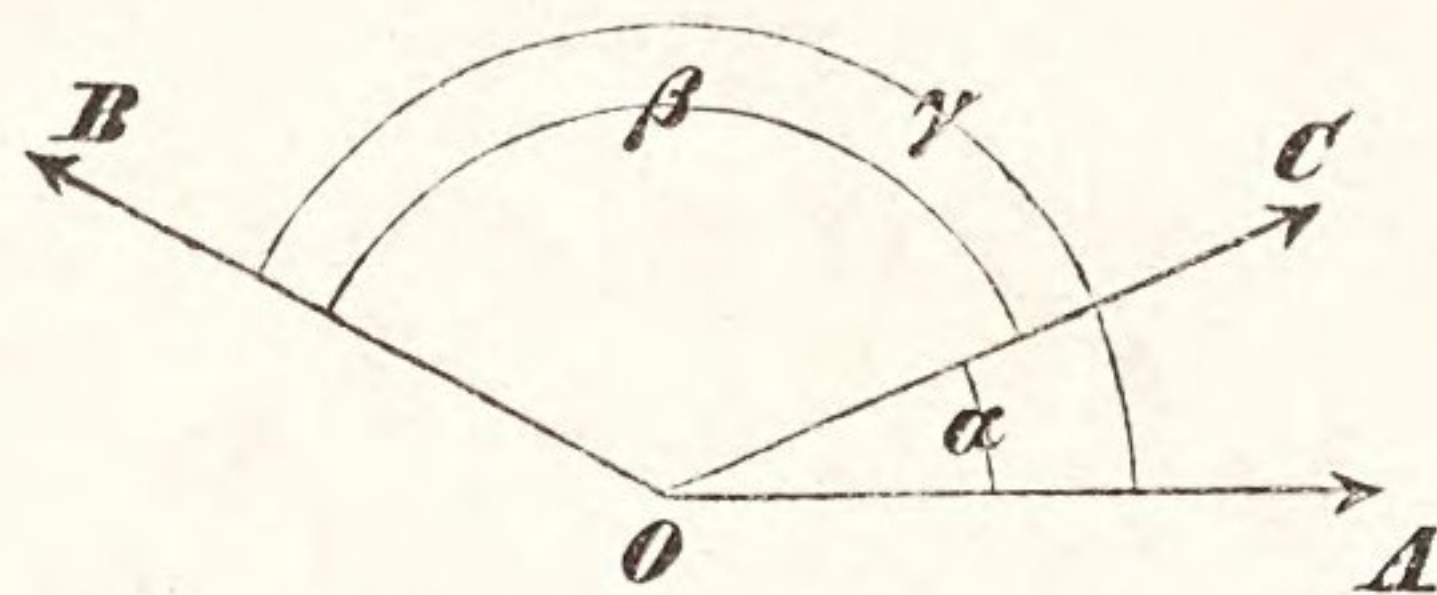
Rechnung mit Winkeln.

1. Addition (Fig. 29).

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}$$

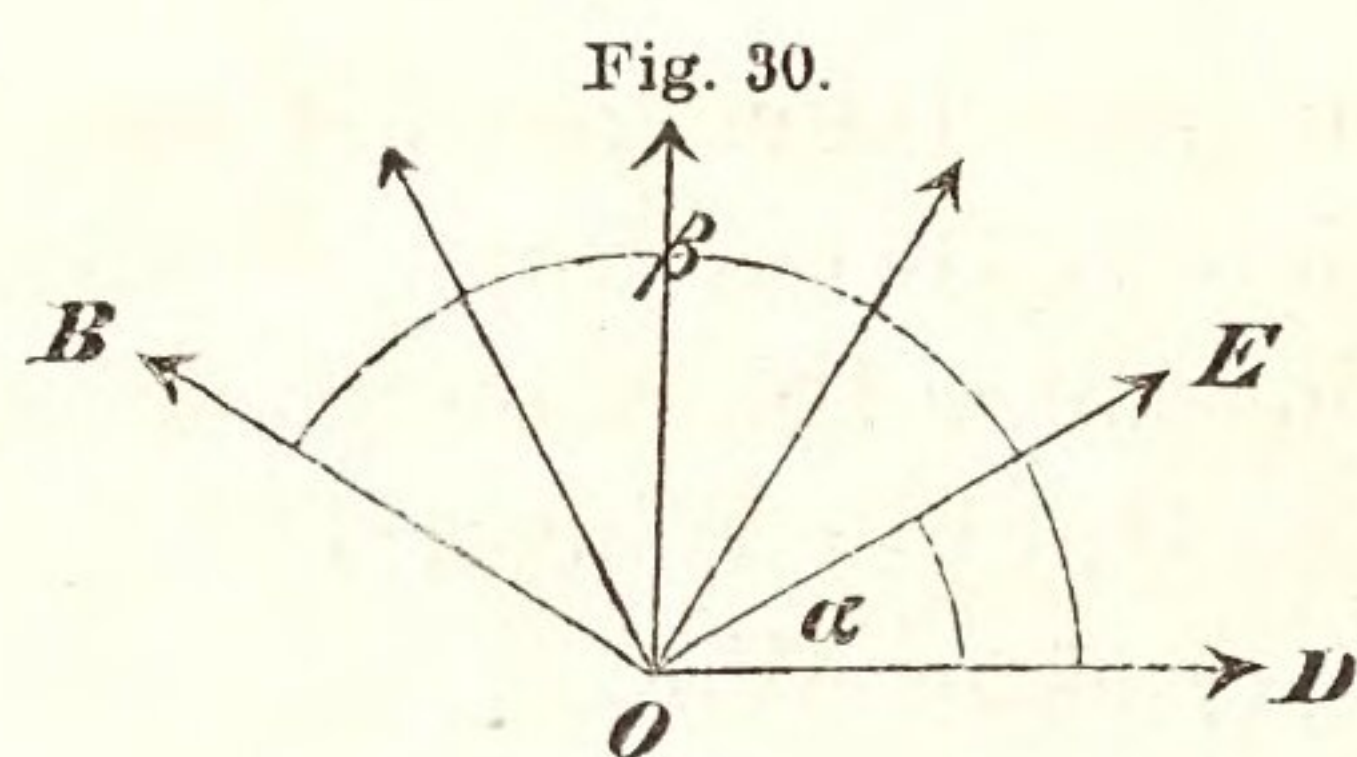
$$\hat{\gamma} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}.$$

In Worten?



2. Subtraction (Fig. 29). $\widehat{AOC} = \widehat{AOB} - \widehat{BOC}$

$$\hat{\alpha} = \hat{\gamma} - \hat{\beta}. \text{ In Worten?}$$



3. Multiplication mit einer ganzen Zahl (Fig. 30).

$\widehat{DOB} = 5 \cdot \widehat{DOE}$; $\hat{\beta} = 5\hat{\alpha}$. In Worten?

4. Division. a) Theilung (Fig. 30).

$$\widehat{DOE} = \widehat{DOB} : 5; \quad \hat{\alpha} = \frac{\hat{\beta}}{5}. \quad \text{In Worten?}$$

b) Messung (Fig. 30).

$$\frac{\widehat{DOB}}{\widehat{DOE}} = 5; \quad \hat{\beta} : \hat{\alpha} = 5. \quad \text{In Worten?}$$

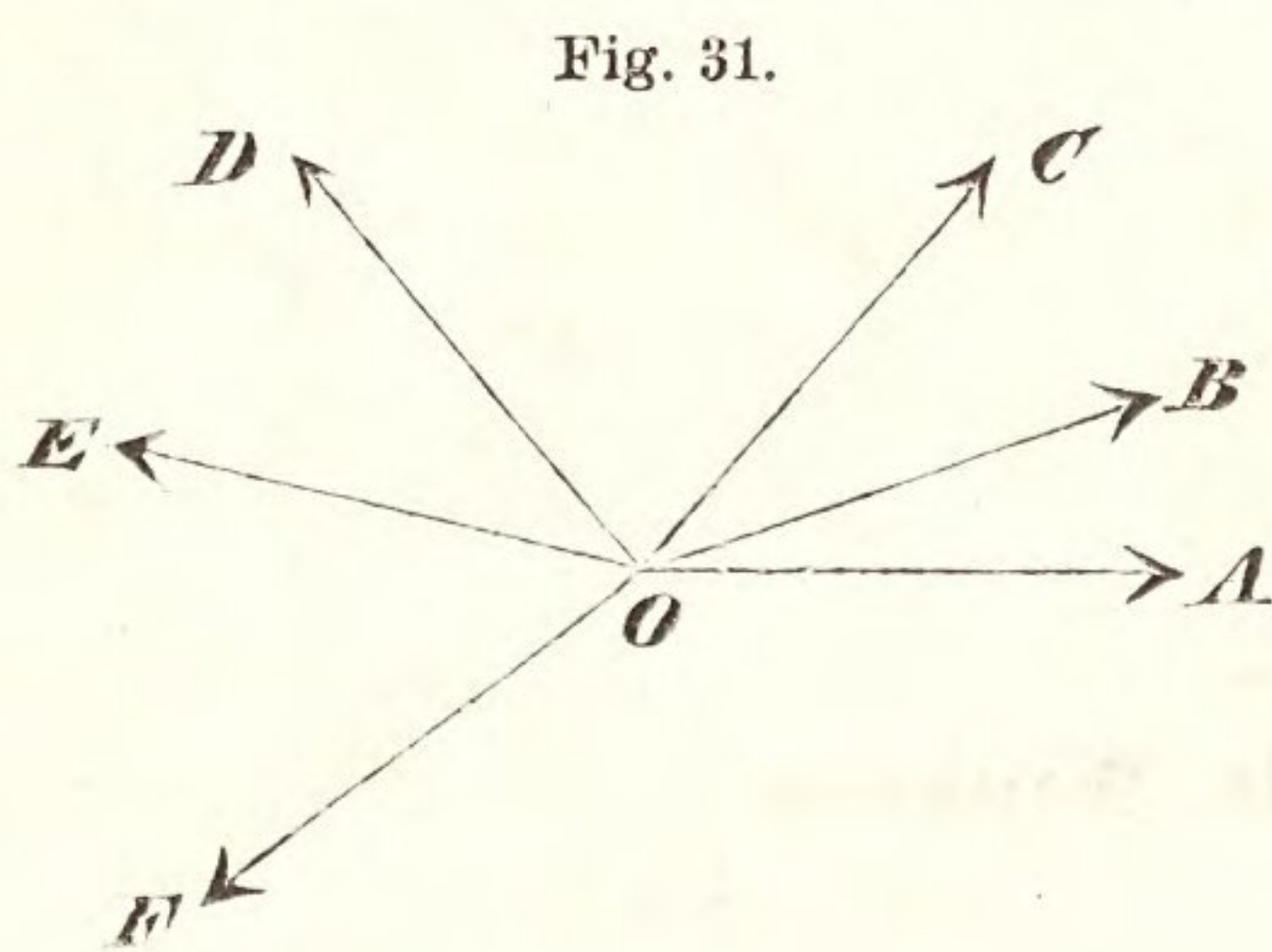
Als Einheiten dienen die Winkel, welche zu den Bogeneinheiten als Centriwinkel gehören. Dieselben führen die Namen Winkelgrad, Winkelminute, Winkelsecunde.

5. Verhältniss zweier Winkel. Winkel verhalten sich wie ihre Masszahlen.

6.

Uebungsstoff.

Anschauung (Fig. 31). 1. Drücke die folgenden Winkel als die Summe zweier Winkel aus: a) $\widehat{AOC}$, $\widehat{BOD}$, $\widehat{COE}$, $\widehat{DOF}$; b) $\widehat{AOD}$,



$\widehat{BOE}$, $\widehat{COF}$ auf zwei Arten; c) $\widehat{AOE}$, $\widehat{BOF}$ auf drei Arten; d) $\widehat{AOF}$ auf vier Arten!

2. Drücke die folgenden Winkel als die Summe dreier Winkel aus:

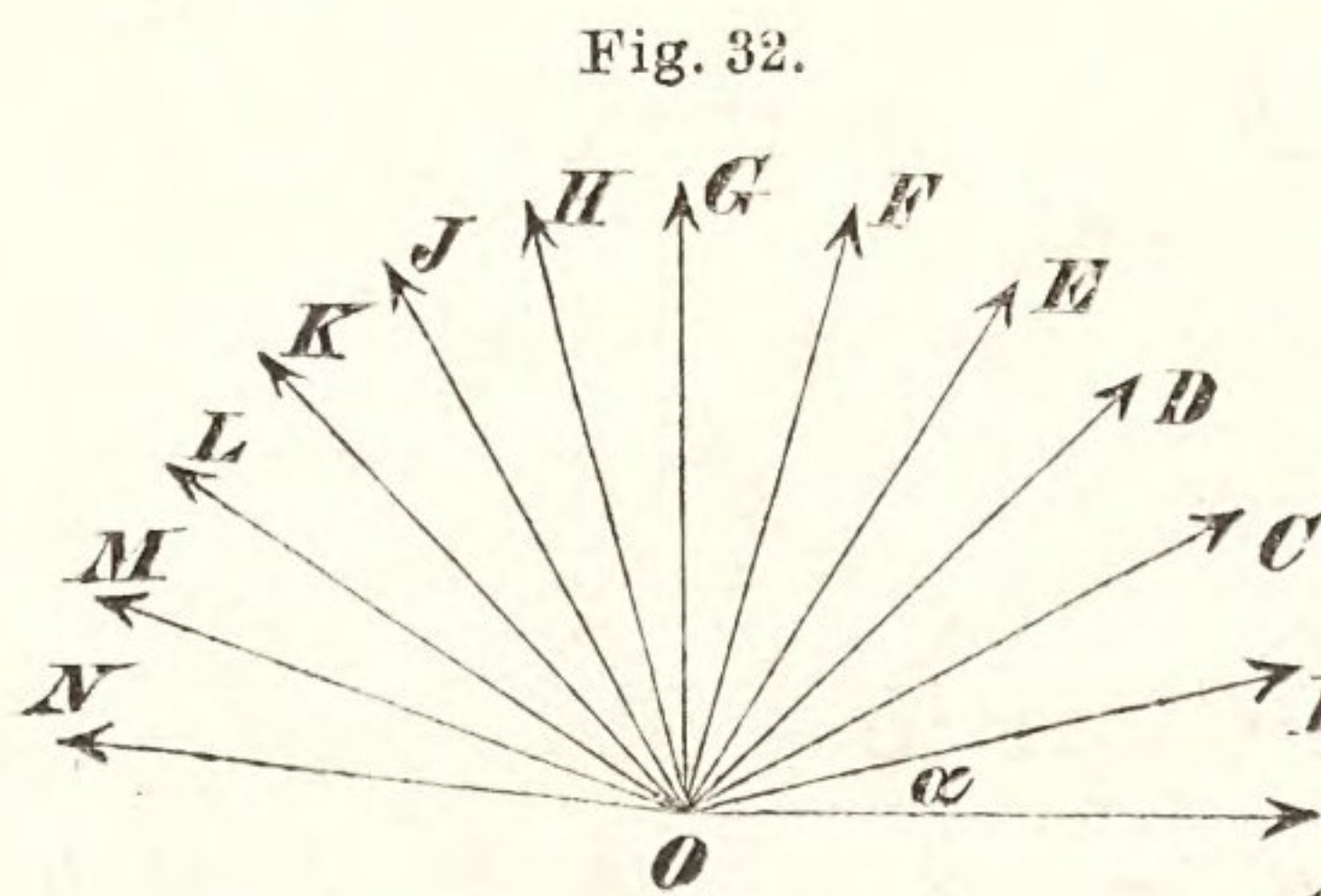
a) $\widehat{AOD}$, $\widehat{BOE}$, $\widehat{COF}$; b) $\widehat{AOE}$, $\widehat{BOF}$ auf drei Arten!

3. Drücke die folgenden Winkel als Differenz zweier Winkel aus:

a) $\widehat{BOC}$, $\widehat{EOF}$; b) $\widehat{AOC}$, $\widehat{BOD}$;

c) $\widehat{BOE}$, $\widehat{COF}$!

4. Das Wievielfache des Winkels



α ist jeder der Winkel $\widehat{AOE}$, $\widehat{EOH}$, $\widehat{DOM}$ (Fig. 32)?

5. Gieb Winkel an, die 2, 3, 4 mal so gross als der Winkel $\widehat{COE}$ sind!

6. Gieb einen Winkel an, der gleich $3\widehat{AOB} + 2\widehat{EOG}$ ist!

7. Der wievielte Theil ist a) $\widehat{DOC}$ von $\widehat{GOM}$; b) $\widehat{DOF}$ von $\widehat{AOG}$; c) $\widehat{EOH}$ von $\widehat{AON}$?

8. Gieb von a) $\widehat{AON}$ den 6.; b) $\widehat{COJ}$ den 3.; c) $\widehat{BOM}$ den 5. Theil an!

9. Wie oft ist $\widehat{HOK}$ in $\widehat{BOM}$ enthalten?

Rechnen. 10. Wie verhält sich a) der rechte Winkel zum gestreckten und zum complete; b) der gestreckte Winkel zum rechten und zum complete; c) der complete Winkel zum rechten und zum gestreckten?

11. Was für ein Winkel ist die Summe eines a) rechten und eines spitzen; b) stumpfen und rechten; c) spitzen und gestreckten; d) rechten und gestreckten; e) gestreckten und stumpfen; f) concaven und gestreckten Winkels?

12. Wie gross ist die Summe a) eines gestreckten und eines rechten; b) zweier gestreckten; c) eines rechten und eines complete; d) eines gestreckten und eines complete Winkels?

13. Was für ein Winkel ist die Differenz eines a) rechten und spitzen; b) gestreckten und stumpfen; c) stumpfen und rechten; d) complete und rechten? e) complete und spitzen; f) complete und stumpfen Winkels?

14. Wie gross ist die Differenz eines a) gestreckten und rechten; b) complete und gestreckten; c) complete und rechten Winkels?

15. Was für ein Winkel ist die Hälfte eines a) rechten; b) stumpfen; c) gestreckten; d) erhabenen; e) complete Winkels?

16. Was für ein Winkel ist der dritte Theil eines a) rechten; b) gestreckten; c) complete Winkels?

17. Was für ein Winkel ist der vierte Theil eines a) complete; b) gestreckten; c) rechten; d) stumpfen; e) concaven; f) convexen Winkels?

18. Wieviel Grade hat ein a) rechter; b) gestreckter; c) completer Winkel?

19. Was für ein Winkel ist ein Winkel von a) 108° ; b) 75° ; c) 315° ; d) 208° ; e) $315^\circ 15'$?

20. Berechne die Summe $\hat{x} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma}$! $\hat{\alpha} = 74^\circ$; $40^\circ 15'$; $15' 46''$; $52^\circ 2' 13''$; $1\frac{4}{5}R$; $\hat{\beta} = \frac{1}{2}R$; $12^\circ 10'$; $43' 22''$; $\frac{5}{8}R$; $13^\circ 42' 15''$; $\hat{\gamma} = 30^\circ$; $\frac{3}{4}R$; $14' 53''$; $10^\circ 0' 24''$; $42^\circ 24' 35''$.

21. Berechne die Winkeldifferenz: $x = \hat{\alpha} - \hat{\beta}$! $\hat{\alpha} = 75^\circ$; 125° ; $76^\circ 24'$; $52' 56''$; $43^\circ 54' 5''$; $\hat{\beta} = \frac{2}{3}R$; $\frac{4}{5}R$; $13^\circ 54'$; $24' 34''$; $0,05R$.

22. Berechne die Winkel: a) $4\hat{\delta}$; b) $7\hat{\delta}$; c) $12\hat{\delta}$! $\hat{\delta} = 25^\circ$; $\frac{3}{4}R$; $15' 43''$; $54^\circ 6' 31''$; $0,08R$.

23. Suche von dem Winkel $\hat{AOB}$ den a) 5.; b) 8.; c) 12. Theil! $\hat{AOB} = 60^\circ$; $1\frac{1}{3}R$; $40' 30''$; $53^\circ 14' 15''$; $8,75^\circ$.

24. Wie oft ist $\hat{AOB}$ in $\hat{COD}$ enthalten? $\hat{AOB} = 54^\circ$; $\frac{2}{3}R$; $4^\circ 5'$; $45^\circ 0' 42''$; $0,75R$; $\hat{COD} = 378^\circ$; 240° ; 49° ; $135^\circ 2' 6''$; 540° .

25. Wie gross ist ein Winkel, der um denselben Winkel grösser als $2R$ und kleiner als $3R$ ist?

26. Welcher Centriwinkel entspricht einem a) Sextanten; b) Octanten?

27. Wieviel Winkelsekunden hat ein Centriwinkel, der einem a) Sextanten; b) Octanten; c) Quadranten entspricht?

28. In welcher Zeit beschreibt der a) Minuten-; b) Stundenzeiger einen Winkel von 1° ?

29. Welchen Winkel beschreibt der Minutenzeiger in a) 1 Stunde; b) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ Stunden; c) 1, 5, 10 Zeitminuten?

30. Welchen Winkel beschreibt der Stundenzeiger in a) 1, 2, 3, 5, 8 Stunden; b) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ Stunden; c) 5, 4 Zeitminuten?

31. Wie gross ist der von beiden Zeigern gebildete Winkel um a) 6, 3, 9, 1 Uhr; b) $5\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, $8\frac{3}{4}$ Uhr?

Zeichnen. 32. (L.) Zeichne einen stumpfen Winkel und stelle ihn als Differenz zweier Winkel dar!

33. Zeichne einen Winkel $\hat{MON}$ und ziehe dann eine Gerade OS so, dass a) $\hat{MON} = \hat{MOS} + \hat{SON}$; b) $\hat{MON} = \hat{MOS} - \hat{SON}$ ist!

34. (L. D. A.) Zeichne drei rechte Winkel und theile sie der Reihe nach in 3, 4, 6 gleiche Theile!

35. Zeichne gestreckte Winkel und theile sie in 2, 5, 6, 8, 12 gleiche Theile!

36. (L. A.) Theile einen complete Winkel in drei gleiche Theile!

37. (L. D. A.) Zeichne einen Winkel gleich $\frac{R}{2} + \frac{R}{3}$!

38. Zeichne einen Winkel $= \frac{2}{3}R - \frac{R}{2}$!

39. Zeichne einen Winkel $\frac{R}{3}$ und dann den fünffachen Winkel!

40. (L. A.) Zeichne einen stumpfen Winkel und theile ihn dann in vier gleiche Theile!

41. (L. T.) Zeichne einen a) spitzen; b) stumpfen Winkel und miss ihn!

42. Wie kann man mittels des Transporteurs einen convexen Winkel messen?

43. Zeichne einen convexen Winkel zwischen a) $2R$ und $3R$; b) $3R$ und $4R$ und miss ihn!

44. Zeichne die Winkel $\hat{\alpha} = 22^\circ$; $\hat{\beta} = 83^\circ$; $\hat{\gamma} = 112^\circ$; $\hat{\delta} = 215^\circ$; $\hat{\varepsilon} = 307^\circ$!

45. Zeichne einen Winkel von 119° und theile ihn mittels des Transporteurs in sieben gleiche Theile!

46. Zeichne einen a) spitzen; b) stumpfen; c) convexen Winkel und mittels des Transporteurs einen ihm gleichen!

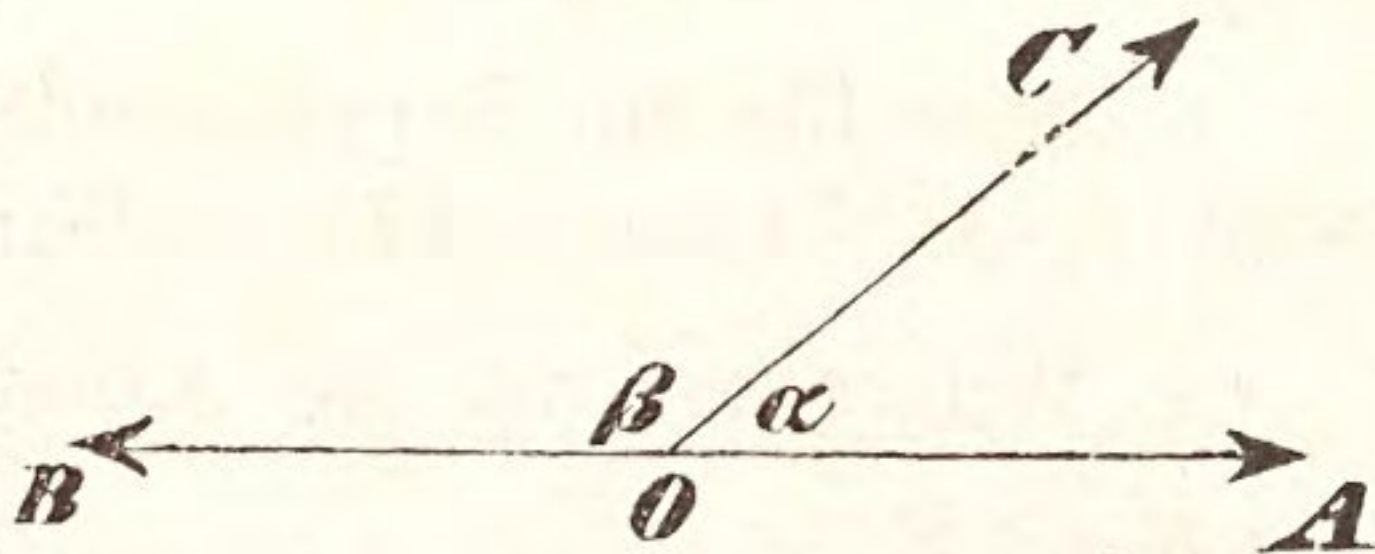
§ 23.

Winkelpaare; Winkel über einer Geraden; Winkel um einen Punkt.

1. Aufgabe. Zeichne einen gestreckten Winkel und theile ihn in zwei Theile!

Fig. 33.

Erklärung. Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel B gemeinschaftlich haben, und deren andere Schenkel in einer Geraden liegen, heissen Nebenwinkel.



Lehrsatz. Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich $2R$ (180°).

Folgerungen. a) Zu gleichen Winkeln gehören gleiche Nebenwinkel; b) haben zwei Winkel gleiche Nebenwinkel, so sind sie gleich.

2. Verschiebe den Winkel $\widehat{COB}$ beliebig. Die beiden Winkel sind keine Nebenwinkel mehr, betragen aber noch immer $2R$, können auch jederzeit wieder in die Lage von Nebenwinkeln gebracht werden.

Erklärung. Winkel, welche zusammen $2R$ betragen, heissen Supplementswinkel. Jeder ist das Supplement des anderen.

Folgerung. Nebenwinkel sind Supplementswinkel.

Theile einen R in zwei beliebige Theile und verschiebe den einen Theil beliebig; die beiden Winkel betragen dann immer noch zusammen $1R$ und können jederzeit wieder so zusammengelegt werden, dass ein rechter Winkel entsteht.

Erklärung. Winkel, welche zusammen $1R$ betragen, heissen Complementswinkel. Jeder ist das Complement des anderen.

Folgerungen. a) Gleiche Winkel haben gleiche Complementary; b) haben zwei Winkel gleiche Complementary, so sind sie gleich.

3.

Uebungsstoff.

1. Was für ein Unterschied besteht zwischen Neben- und Supplementswinkeln?

Rechnen. 2. Was für einen Nebenwinkel hat ein a) spitzer; b) rechter; c) stumpfer Winkel?

3. Wie gross ist der Nebenwinkel zu a) R ; b) $\frac{R}{2}$; c) $\frac{3}{4}R$; d) $\frac{5}{3}R$?

4. Was für ein Complement hat ein a) spitzer Winkel; b) Winkel $= \frac{2}{3}R$?

5. Was für ein Supplement hat ein a) spitzer; b) R ; c) stumpfer Winkel; d) Winkel $= \frac{2}{3}R$; e) Winkel $= \frac{5}{3}R$?

6. Wie gross ist das Complement der Winkelsumme a) $\frac{R}{2} + \frac{R}{3}$; b) $\frac{2}{3}R + \frac{1}{4}R$?

7. Wie gross ist das Supplement der Winkelsumme a) $R + \frac{R}{3}$; b) $\frac{2}{3}R + \frac{3}{4}R$?

8. Gieb zu dem Winkel a) 42° ; b) $\frac{1}{3}R$; c) $4^\circ 15'$; d) $54^\circ 13' 24''$; e) $0,45R$ das Complement an!

9. Gieb zu dem Winkel a) 114° ; b) $1\frac{1}{5}R$; c) $59^\circ 4'$; d) $75^\circ 24' 30''$; e) $1,15R$ das Supplement an!

10. Gieb zu der Winkelsumme a) $45^\circ + \frac{1}{2}R$; b) $13^\circ 4' 25'' + 43^\circ 0' 35''$; c) $0,25R + 13^\circ$ das Complement an!

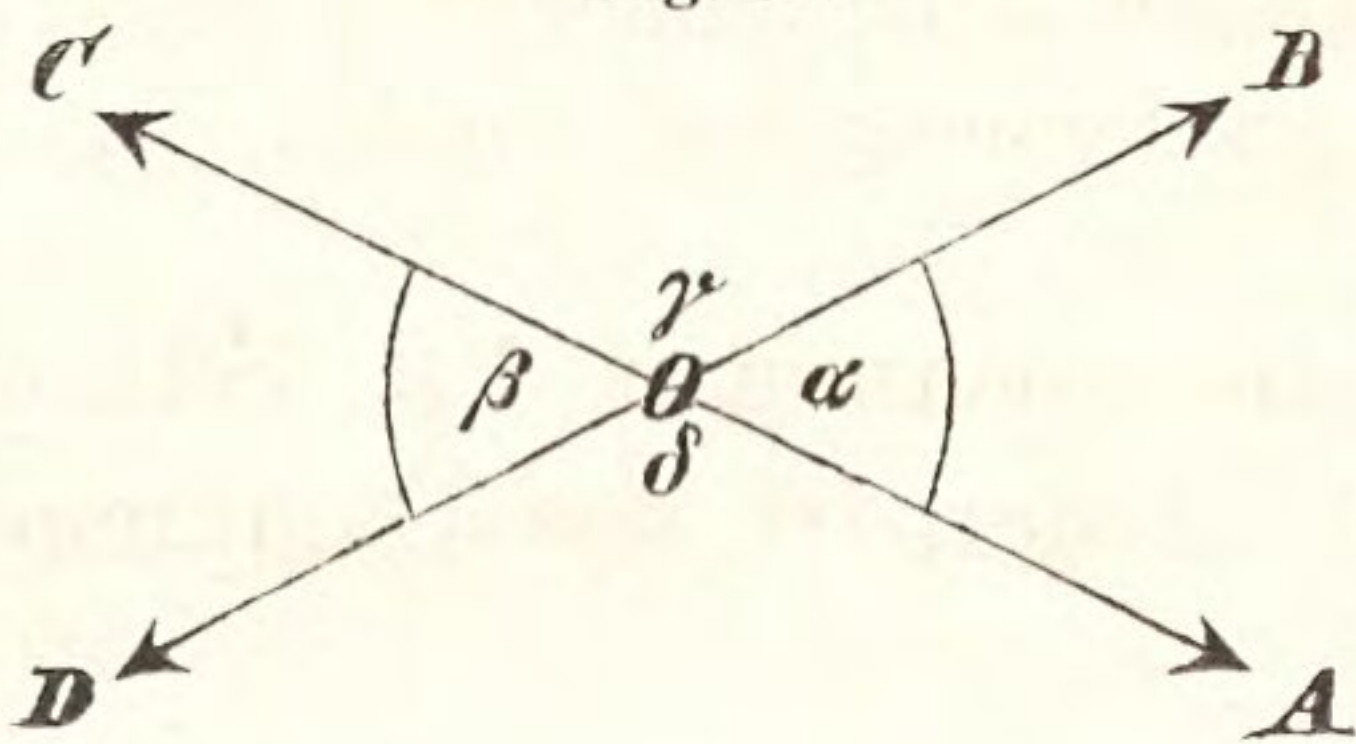
11. Gieb zu der Winkelsumme a) $\frac{4}{5}R + 63^\circ$; b) $82^\circ 0' 54'' + 59' 6''$; c) $1,5R + 12^\circ$ das Supplement an!

12. Gieb einen Winkel im Gradmass an, der a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{3}{4}$ seines Complementaryswinkels ist!

13. Gieb einen Winkel im Gradmass an, der a) $\frac{3}{4}$; b) $1\frac{1}{2}$; c) $0,75$ seines Supplementswinkels ist!

Zeichnen. 14. (L. D.) Zeichne einen a) spitzen; b) rechten; c) stumpfen Winkel und dann seinen Nebenwinkel.

Fig. 34.



4. Verlängere beide Schenkel eines Winkels AOB über den Scheitel hinaus. Dreht man nun OA in die Lage von OB , so dreht sich gleichzeitig OC in die Lage von OD ($\hat{\alpha} = \hat{\beta}$).

Erklärung. Zwei Winkel, welche den Scheitel gemeinschaftlich haben und deren Schenkel entgegengesetzt gerichtet sind, heissen Scheitelwinkel.

Lehrsatz. Scheitelwinkel sind einander gleich.

Beweis s. o. oder: gleiche Supplemente $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$.

Fig. 35.

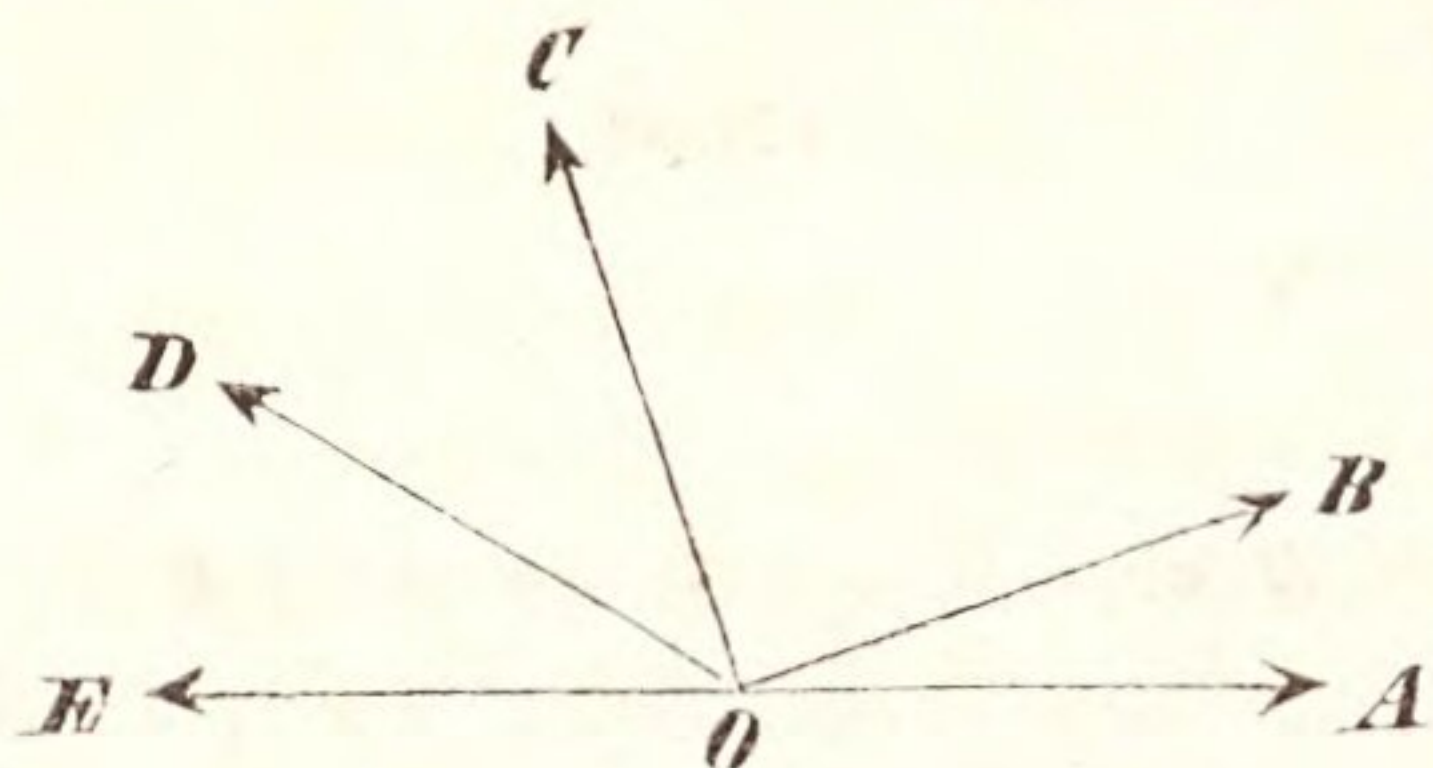
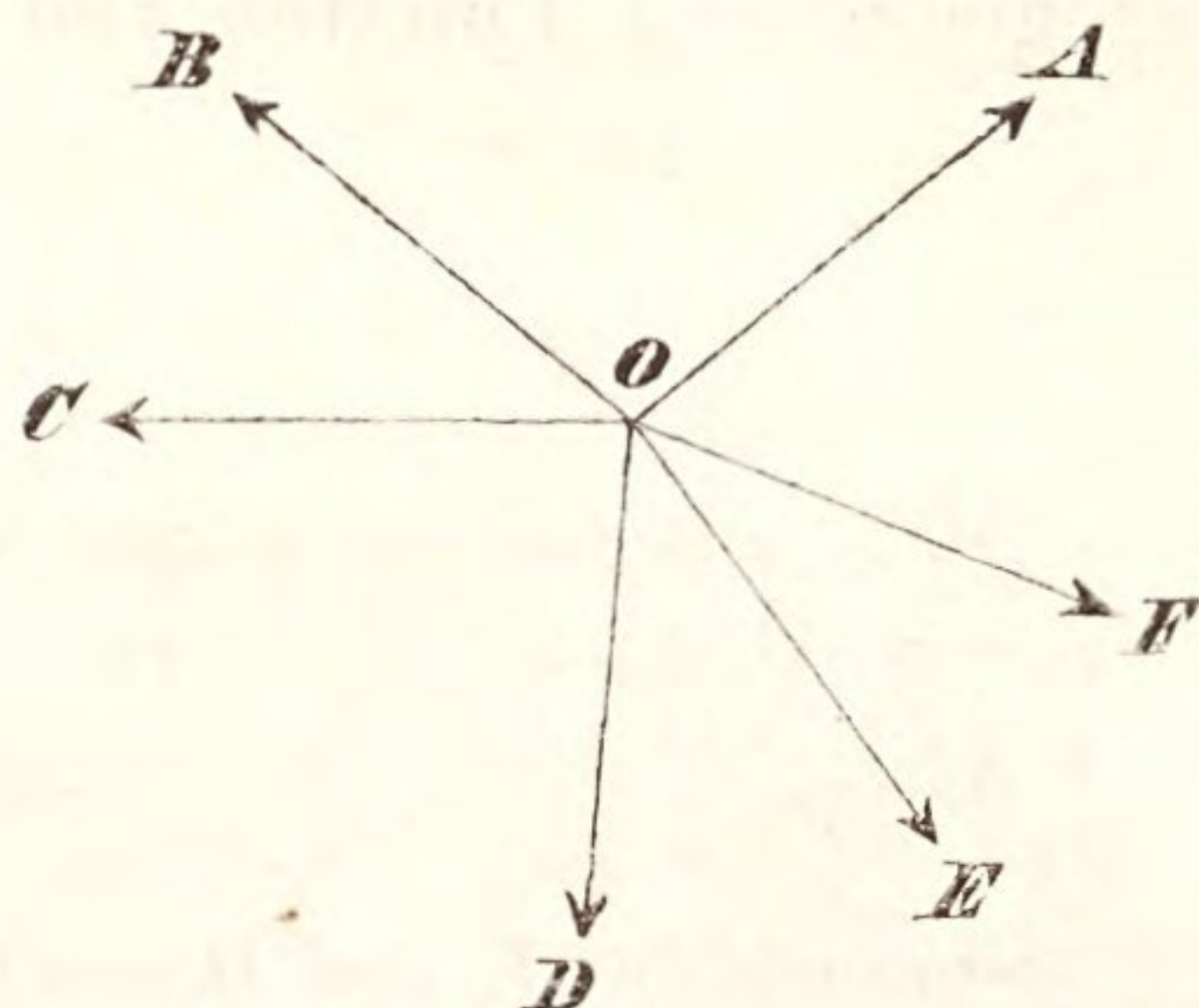


Fig. 36.



Theile einen gestreckten Winkel in mehrere Theile (Fig. 35).

Erklärung. Die Theile eines gestreckten Winkels heissen Winkel über einer Geraden.

Lehrsatz. Die Summe der Winkel über einer Geraden ist gleich $2R$.

Theile einen complete Winkel in mehrere Theile (Fig. 36).

Erklärung. Die Theile eines complete Winkels heissen Winkel um einen Punkt herum.

Lehrsatz. Die Summe der Winkel um einen Punkt herum ist gleich $4R$.

5. Uebungsstoff.

1. (L. T.) Zeichne fünf Winkel über einer Geraden, miss und addire sie!
2. Zeichne sechs Winkel um einen Punkt herum, miss und addire sie!
3. Zeichne einen a) spitzen; b) rechten; c) stumpfen Winkel und dann seinen Scheitelwinkel! Miss die Scheitelwinkel!

§ 24.

Senkrechte Geraden.

1. **Erklärung.** Bilden zwei Geraden einen rechten Winkel, so sagt man, sie stehen senkrecht (normal, lothrecht

oder perpendikulär $\perp$) auf einander. Jede heisst in Beziehung auf die andere die Senkrechte (Normale, das Loth oder Perpendikel). Der Durchschnittspunkt heisst Fusspunkt der Senkrechten.

Zieht man von einem Punkte zu einer Geraden eine Senkrechte, so heisst die Strecke zwischen diesem Punkte und dem Fusspunkte die Entfernung oder der Abstand des gegebenen Punktes von der Geraden.

Fig. 37.

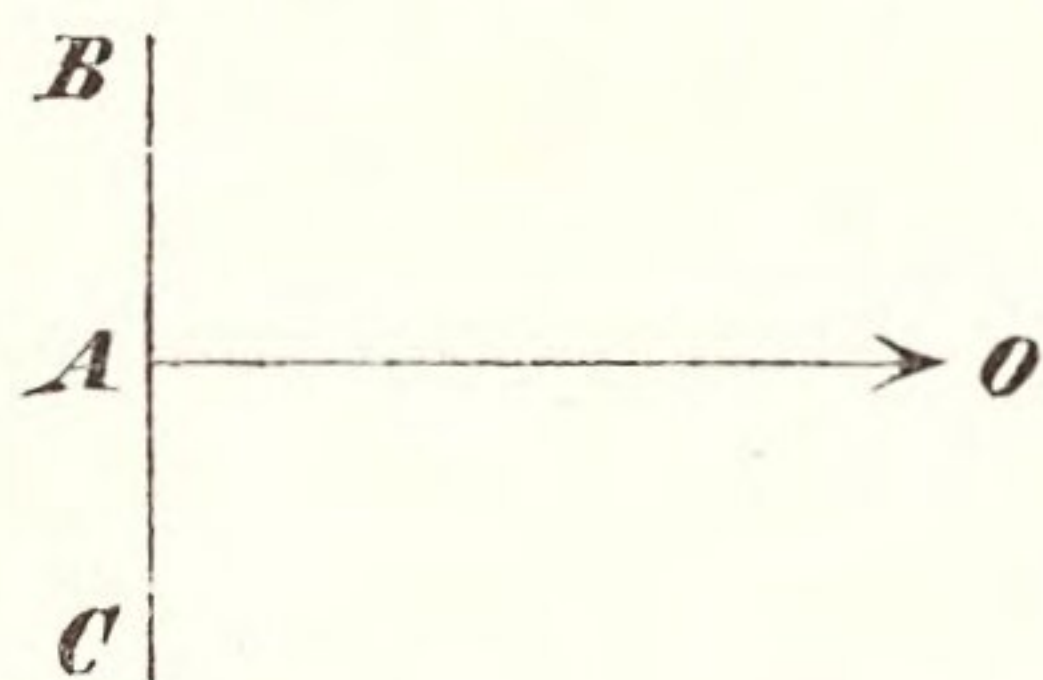
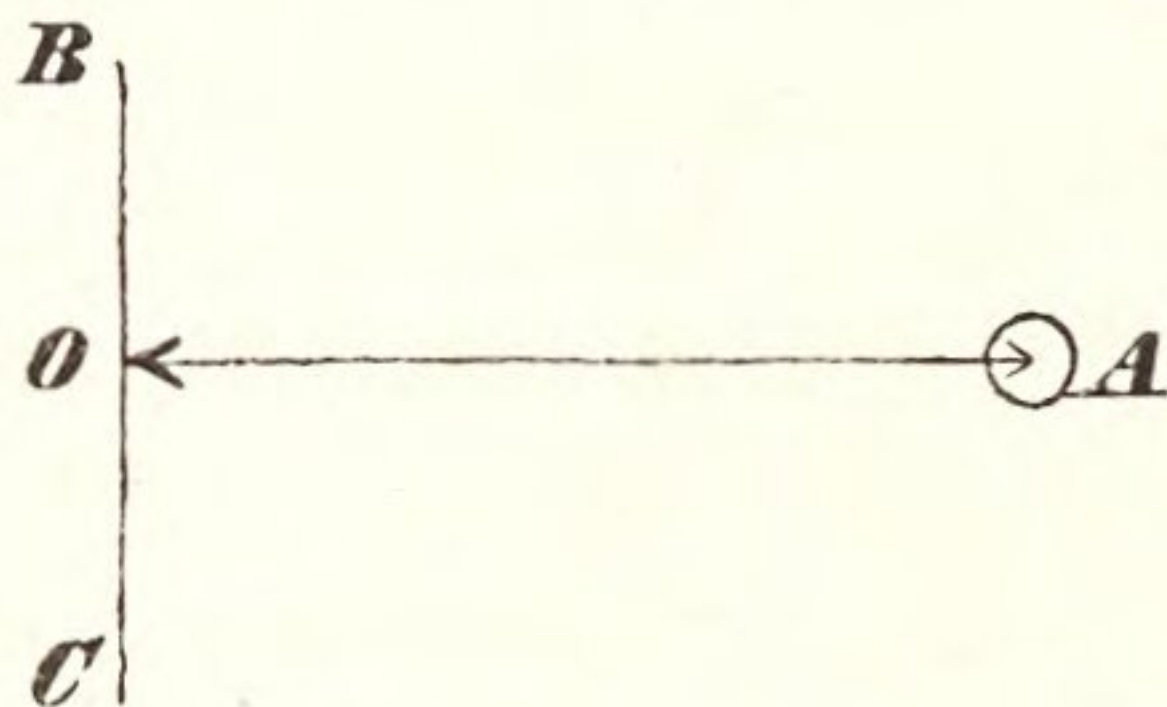


Fig. 38.



Gebrauch des *L.* und *D.* zur Lösung folgender Aufgaben: a) Fig. 37. Man errichte in einem gegebenen Punkte (*A*) einer Geraden (*BC*) die Senkrechte (*AO*) auf ihr! b) Fig. 38. Man fälle von einem gegebenen Punkte (*A*) auf eine Gerade (*BC*) die Senkrechte (*AO*)!

Dreht man die Senkrechte *OA* (Fig. 37) auch nur ein wenig aus ihrer Lage, so ist der Winkel *BAO* grösser oder kleiner geworden, also kein *R* mehr, daher:

Folgerung. Auf einer Geraden lässt sich in einem Punkte derselben nur eine Senkrechte errichten.

Erklärung. Bilden zwei Geraden keinen rechten Winkel mit einander, so sagt man, sie stehen schief auf einander.

2.

Uebungsstoff.

Anschauung. 1. Gieb an Gegenständen im Lehrzimmer Geraden an, die auf einander a) senkrecht; b) schief stehen!

Zeichnen. 2. (*L. D. C.*) Zeichne eine Strecke und errichte auf ihr in der Mitte die Senkrechte (Mittelsenkrechte)!

3. (*L. D. C. M.*) Zeichne eine Strecke = 50 mm, theile sie in vier gleiche Theile und errichte in den End- und Theilpunkten Senkrechte, die der Reihe nach 1 cm, 25 mm, 3 cm, 35 mm, 4 cm lang sind!

4. (*L. D.*) Zeichne eine Gerade, nimm ausserhalb derselben einen Punkt an und fälle von diesem Punkte auf sie die Senkrechte!

5. (*L. D. C. M.*) Zeichne eine Gerade, nimm oberhalb und unterhalb je einen Punkt an und suche die Abstände dieser Punkte von der Geraden!

6. Zeichne einen Winkel $= \frac{2}{3}R$, mache jeden Schenkel $= 2\text{ cm}$, errichte in den Endpunkten auf den Schenkeln Normalen und miss die Abstände des Durchschnittspunktes derselben von den Schenkeln!

IV. Würfel und Quadrat.

§ 25.

Betrachtung des Würfels. Quadrat.

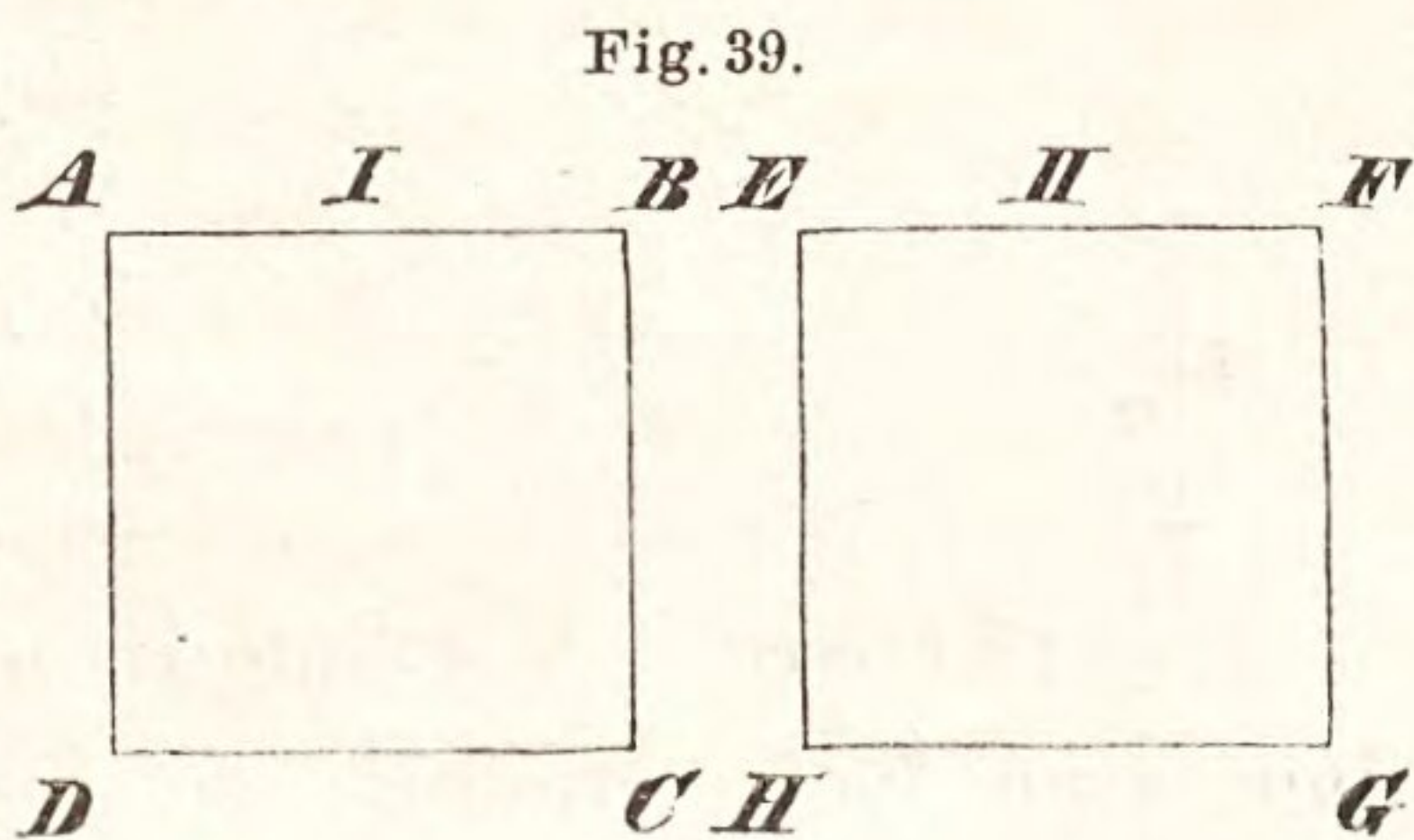
1. Es wird ein Würfel vorgezeigt, der Name genannt oder besser erfragt. Ein Lineal, dessen Kante eine Gerade vorstellt, wird in verschiedenen Richtungen auf die Flächen gelegt und gezeigt, dass fast nirgends ein Zwischenraum bleibt. Eigenschaft der Ebene. Die Unvollständigkeit des Zusammenfallens giebt Veranlassung, auf den Unterschied zwischen physischem und mathematischem Körper aufmerksam zu machen. Der Würfel ist also von Ebenenstücken, welche von vier Strecken begrenzt sind, eingeschlossen.

Man setze den Würfel auf die Wandtafel oder auf ein Blatt Papier und fahre mit Kreide oder Blei längs der Kanten der aufliegenden Fläche und zeige, dass jede Fläche sich auf vier Arten mit der abgezeichneten zur Deckung bringen lässt.

Erklärung. Eine ebene Figur, welche von vier Strecken begrenzt wird, heisst Viereck. Der Würfel ist von congruenten Vierecken eingeschlossen.

Stellt man den Würfel auf eine seiner Flächen, so haben diese und die obere den Namen Grundflächen, die übrigen: Seitenflächen. Die Strecken heissen in Bezug auf die Figuren Seiten, in Bezug auf den Körper Kanten (Grundkanten, Seitenkanten). Die Endpunkte der Kanten heissen Ecken.

2. Man zeichne zwei Flächen des Würfels auf starkes Papier ab (Fig. 39) und schneide sie aus. Man zeige, dass sich II mit I auf vierfache Weise zur Deckung bringen lässt, so dass EF entweder auf AB , oder auf BC , oder CD , oder DE fällt. Bei der



der ersten Lage deckt $\hat{E}$ den $\hat{A}$, bei den folgenden resp. $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$. Seiten und Winkel sind also unter sich gleich.

Erklärung. a) Ein Viereck, in welchem alle Seiten und Winkel unter sich gleich sind, heisst Quadrat.

b) Eine ebene Figur, in welcher alle Seiten und Winkel unter sich gleich sind, heisst regelmässig oder regulär. Das Quadrat ist eine regelmässige Figur.

c) Ein von sechs congruenten Quadraten begrenzter Körper heisst Würfel (Hexaëder). Er hat zwölf gleichlange Kanten und acht Ecken.

3. Welche Verschiedenheit des Aussehens macht sich bemerklich, wenn man einen Würfel auf seine verschiedenen Flächen oder Ecken stellt?

Erklärung. Ein Körper, der, wie man ihn auch halten mag, stets dasselbe Aussehen zeigt, heisst regelmässig (regulär). Der Würfel ist ein regulärer Körper.

4.

Uebungsstoff.

1. Der Umfang eines Quadrates sei u , wie gross ist dessen Seite a ?
 $u = 64 \text{ mm}$, $0,180 \text{ m}$.

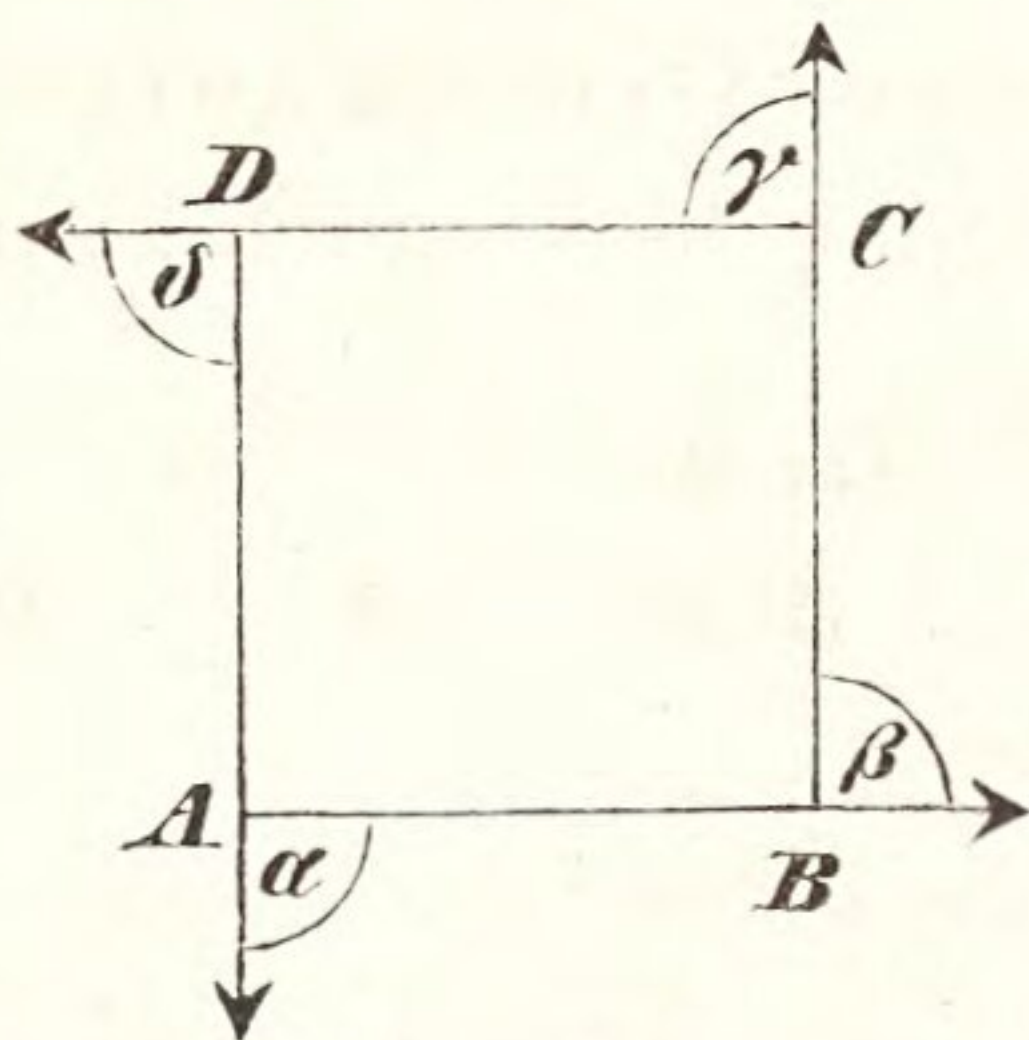
2. Die Kante eines Würfels sei a , wie gross ist sein Umfang (Kantensumme) U ? $u = 25 \text{ mm}$, $2,5 \text{ dm}$.

3. Der Umfang eines Würfels sei U , wie gross ist dessen Kante a ?
 $U = 216 \text{ mm}$, $6,24 \text{ m}$.

§ 26.

Anfertigung des Würfels.

Fig. 40.



1. Marschire in Gedanken längs des Quadrats $ABCD$ (Fig. 40), bis du wieder in dieselbe Richtung blickst, von welcher du ausgegangen. Du hast eine ganze Umdrehung gemacht. Dasselbe ergibt sich, wenn man in die Richtung AB einen Stock legt, denselben bis B verschiebt, dann um den Winkel β in die Richtung BC dreht, darauf bis C verschiebt, um $\hat{\gamma}$ nach CD dreht u. s. f., bis man wieder in AB gelangt ist.

Erklärung. Verlängert man eine Seite eines Vierecks über eine Ecke hinaus, so heisst der entstandene Winkel

Aussenwinkel des Vierecks. An jeder Ecke befinden sich zwei Aussenwinkel, die als Scheitelwinkel einander gleich sind.

Lehrsatz. Die Summe der Aussenwinkel eines Quadrats (an jeder Ecke einen gerechnet) ist $= 4R$ (360°).

2. Jeder Aussenwinkel beträgt mit dem anliegenden inneren Winkel $2R$, alle vier Paare also $8R$; da aber die Aussenwinkel $4R$ betragen, so müssen die inneren Winkel zusammen auch $4R$ betragen.

Lehrsatz. Die Winkelsumme eines Quadrats ist $= 4R$ (360°); also ist jeder Winkel $= 1R$ (90°).

Aufgabe. (*M. D.*) Zeichne ein Quadrat, dessen Seite = a) 5 cm; b) 32,5 mm; c) 0,064 m ist.

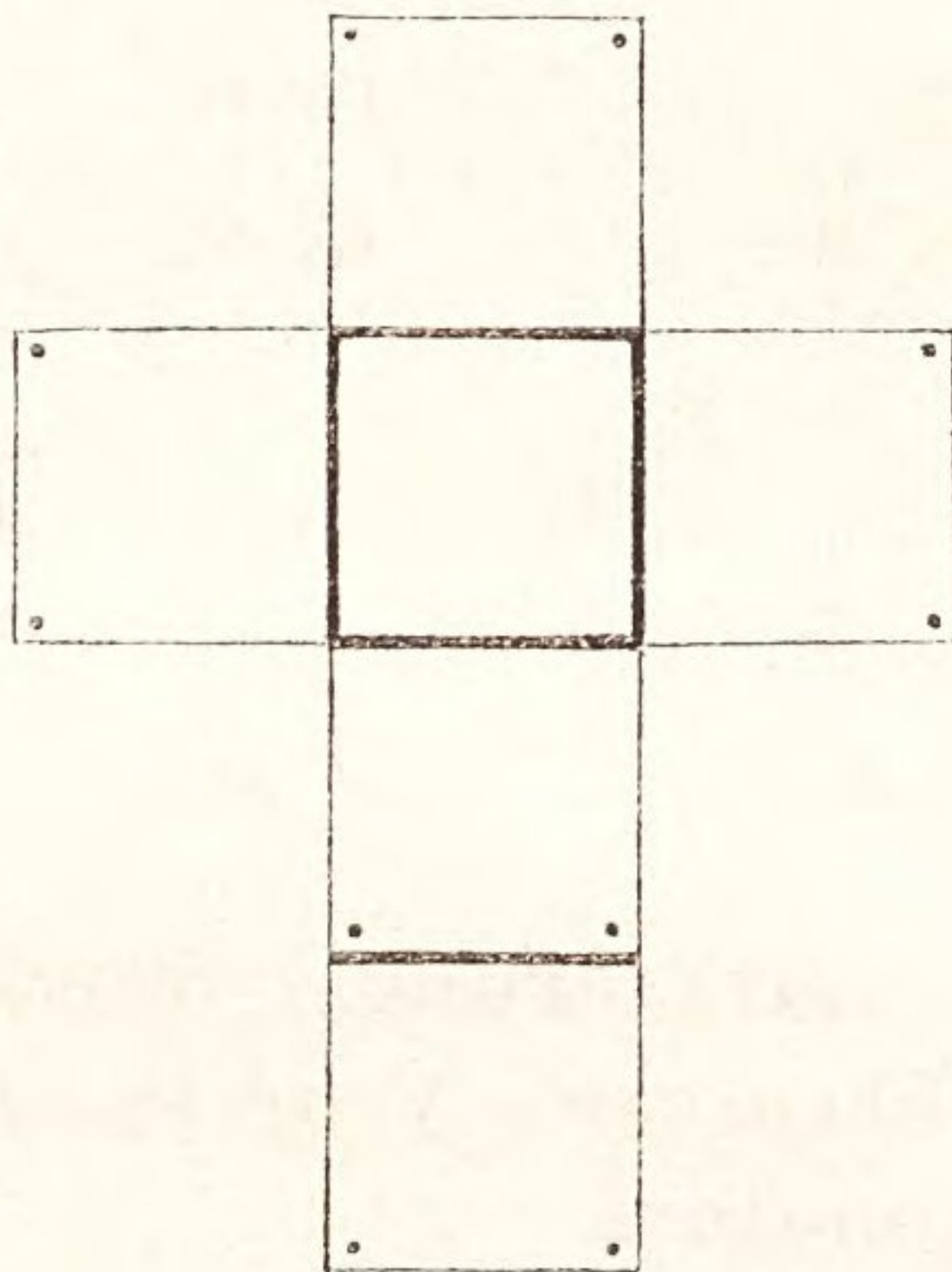
3. Der Lehrer breite einen dazu vorbereiteten Würfel auf der Tafel zum Netze aus. [Ein solcher Würfel lässt sich leicht herstellen, wenn man die Kanten nicht zusammenklebt, sondern mit Hilfe passend angebrachter Löcher an den Ecken zusammenbindet (Fig. 41).]

Erklärung. Breitet man die Flächen eines Körpers zusammenhängend in eine Ebene aus, so heisst die entstandene Figur Netz des Körpers.

Aufgabe. Zeichne das Netz eines Würfels, dessen Kante gleich a) 5 cm, b) 1 dm ist auf Pappe, ziehe die in Fig. 41 stark gezeichneten Linien roth aus und schneide dieselben halb durch (reisse sie ein), die übrigen ganz durch! Alsdann setze aus dem Netz durch Zusammenlegen und Zusammenkleben einen Würfel zusammen.*

Erklärung. Der Raum eines Würfels, dessen Kante = 1 dm ist, heisst Liter (1l). Das Liter dient besonders

Fig. 41.



* Das Anfertigen bietet den Knaben wenig Schwierigkeit und macht ihnen Freude. Es ist von Jedem zu verlangen. Das Zusammenkleben geschieht am besten zunächst mit gummirten dünnen Papierstreifen. Ist der Körper formirt, so werden die Flächen mit gleichfarbigem Papier und die Kanten mit schmalen Papierstreifen von anderer Farbe überklebt.

zum Messen von Flüssigkeiten. Obere und untere Eintheilung desselben.

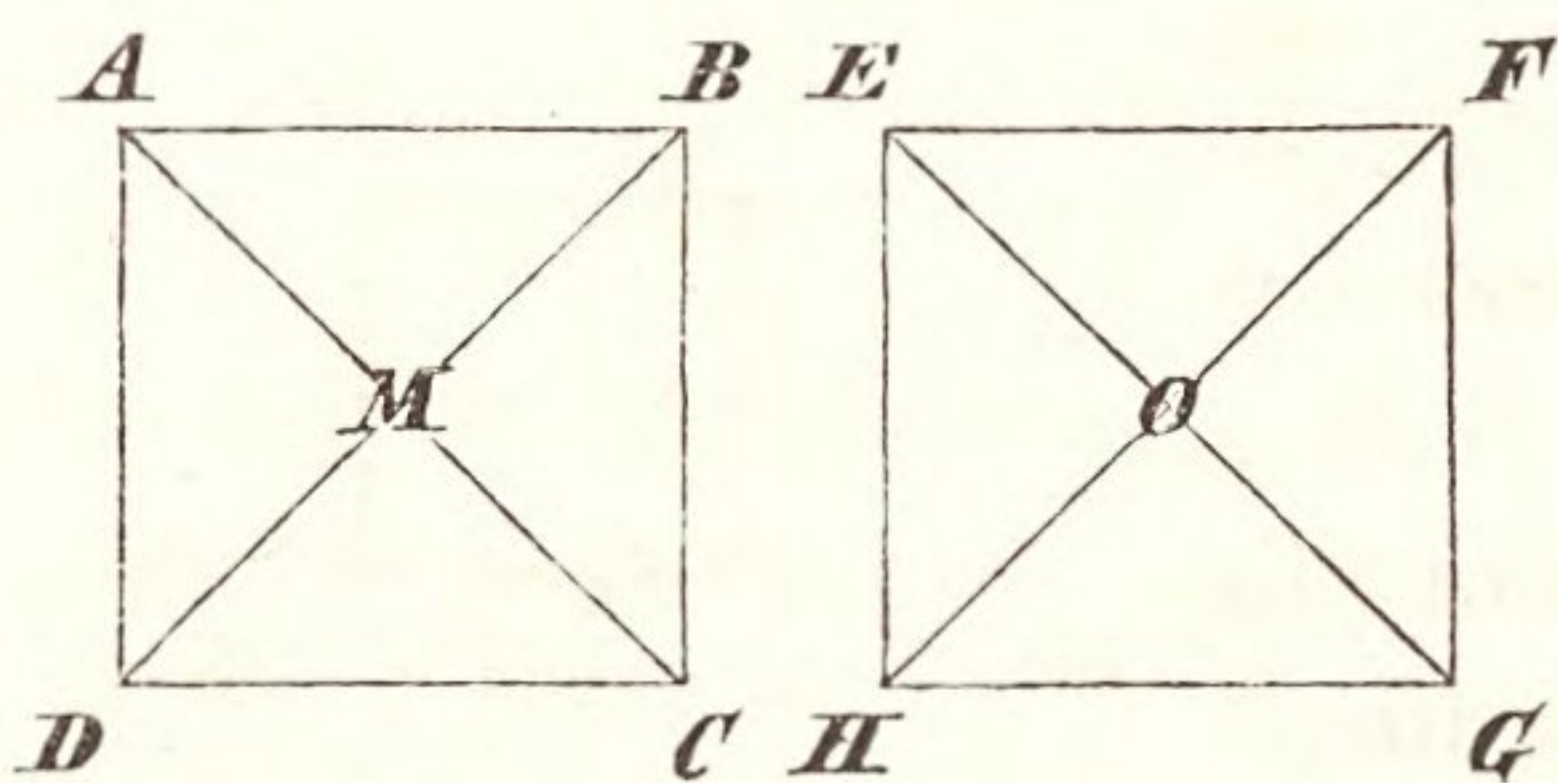
Ein oben offenes Liter von Blech (welches jede Schule besitzen sollte, eventuell leicht zu beschaffen ist) wird mit Wasser gefüllt und vor den Augen der Schüler gewogen. [Der Lehrer gebrauche dabei die Vorsicht, nicht gleich sämtliches Wasser einzufüllen, sondern nach und nach zuzugießen. Etwaige kleine Abweichungen erkläre er (Temperatur u. s. w.)]. Die Wage sei nicht zu empfindlich.'

Erklärung. Das Gewicht eines Liters Wasser (im Zustande seiner grössten Dichtigkeit) heisst Kilogramm (1 kg). Eintheilung desselben.

Weitere Eigenschaften des Quadrats.

§ 27.

Fig. 42.



1. Zeichne ein Quadrat von beliebiger Seitenlänge. Stich die Ecken durch auf ein Blatt Papier und zeichne so ein demselben congruentes Quadrat. Ziehe in beiden die Strecken, welche die gegenüberliegenden Ecken mit einander verbinden.

Erklärung. Strecken, welche die gegenüberliegenden Ecken eines Vierecks mit einander verbinden, heissen Diagonalen.

Schneide nun die Quadrate aus und bringe sie in die in § 25, 2 genannten vier Deckungslagen. Wohin kommt jedesmal EO zu liegen, wohin EG , wohin $\widehat{EOF}$ und was folgt daraus?

Lehrsatz. In jedem Quadrate halbieren die Diagonalen einander, sind gleich lang und stehen auf einander senkrecht.

2. Erklärung. Der Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Quadrats heisst Mittelpunkt desselben.

Folgesatz. Der Mittelpunkt eines Quadrats ist von den Ecken gleichweit entfernt. — Jedem Quadrate lässt sich ein Kreis umschreiben.

Aufgaben. 1. (*M. D. T. C.*) Zeichne ein Quadrat, dessen Seite beliebig lang ist und controllire die gefundenen Wahrheiten durch Messung.

2. Einem gezeichneten Quadrate einen Kreis umzuschreiben.

3. Die Figuren, in welche ein Quadrat durch eine oder beide Diagonalen getheilt wird, sind von drei Strecken begrenzt.

Erklärung. Eine ebene Figur, welche von drei Strecken begrenzt wird, heisst Dreieck.

§ 28.

1. Zeichne eine Strecke gleich a) 4,5 cm; b) 32 mm; c) beliebig lang; halbire dieselbe, errichte im Halbirungspunkte die Senkrechte und mache die beiden Theile derselben gleich der Hälfte der ersten Strecke; verbinde die unverbundenen Punkte. — Miss die Seiten und gieb ihre Länge an, miss die Winkel und gieb ihre Gradzahl an.

Lehrsatz. Ein Viereck, in welchem die Diagonalen einander halbiren, gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen, ist ein Quadrat.

Aufgabe. Einem gegebenen Kreise ein Quadrat einzuschreiben.

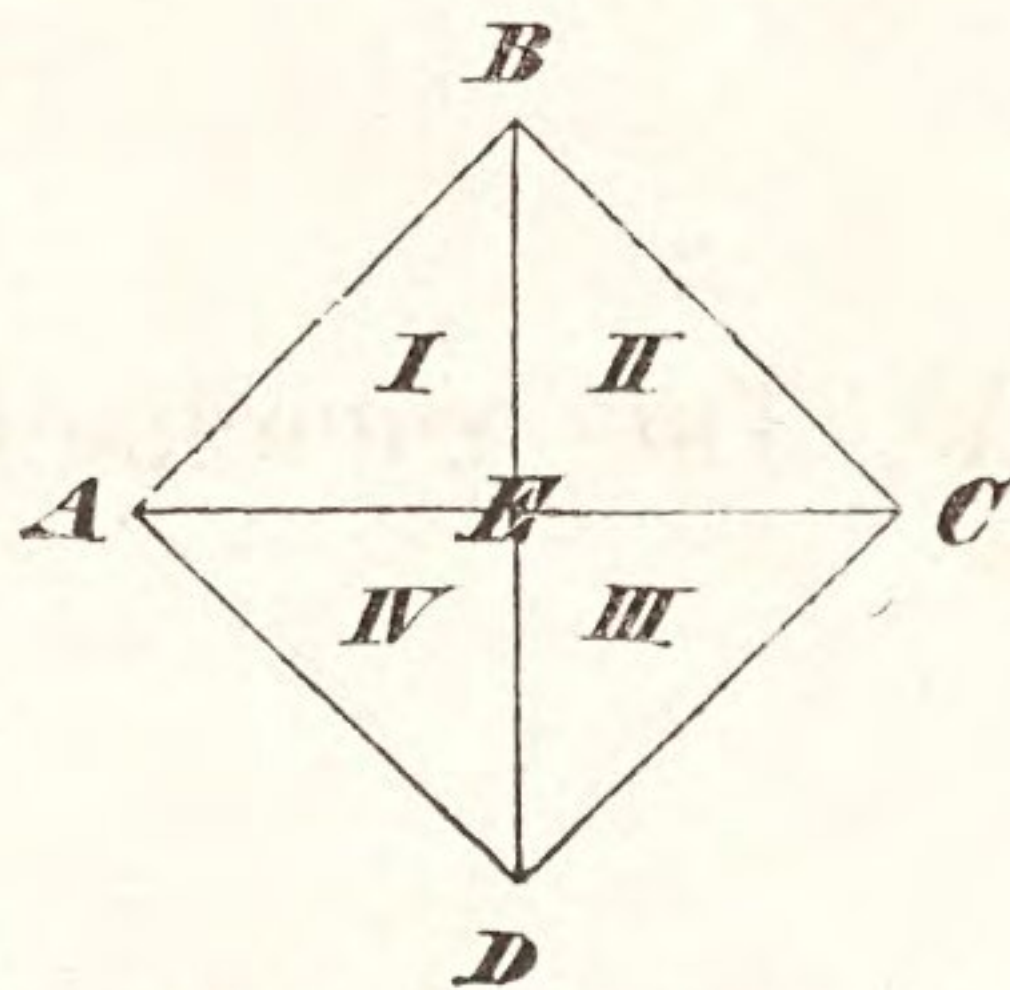
2. Der vorige Lehrsatz lässt sich allgemein erweisen, wenn man eines der in 1 gezeichneten Quadrate durchsticht und das so erhaltene Quadrat viermal mit dem ersten zur Deckung bringt. Gieb die Gründe an, warum in jeder Lage die einzelnen Stücke auf einander fallen müssen.

3. Ein weiterer Nachweis wird durch die Ausführung der folgenden Aufgaben geliefert:

Aufgabe. a) Zeichne ein Quadrat aus der Diagonale *AC* (Fig. 43); schneide die Dreiecke I bis IV aus und bringe sie zur Deckung (sowohl durch Umklappen, als auch durch Verschieben). Gleichheit der Seiten. — Führe die Operationen in Gedanken aus und gieb an, warum die einzelnen Stücke auf einander fallen.

Lehrsatz. In jedem Quadrat halbiren die Diagonalen die Winkel. Jeder Theilwinkel ist also gleich $\frac{1}{2}R$ ($= 45^\circ$).

Fig. 43.



Aufgabe. b) Zeichne mittels Durchstechens ein dem vorigen congruentes Quadrat, schneide dann das erste längs AC (Fig. 43), das zweite längs BD durch und bringe die vier Dreiecke auf einfache Weise (Umklappen, Verschieben) zur Deckung! Gleichheit der Winkel. — Führe die Operation nur in Gedanken aus und gieb an, warum die einzelnen Stücke auf einander fallen müssen.

§ 29.

1. Aufgabe. Einen gegebenen rechten Winkel zu halbiren.

Auflösung. Durch Vervollständigung zu einem Quadrate.

2. In sämtlichen Dreiecken, die beim Quadrate vorkommen, ist je ein Winkel ein Rechter.

Erklärung. Ein Dreieck, in welchem ein Winkel ein Rechter ist, heisst rechtwinklig. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heisst Hypotenuse, die einschliessenden Seiten heissen Katheten.

3. Ferner sind in jedem der Dreiecke die Katheten einander gleich:

Erklärung. Ein Dreieck, in welchem zwei Seiten einander gleich sind, heisst gleichschenklig. Die gleichen Seiten heissen Schenkel, die ungleiche Seite Grundlinie oder Basis.

4. Folgerung. Das Quadrat wird durch eine Diagonale in zwei, durch beide Diagonalen in vier congruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke getheilt.

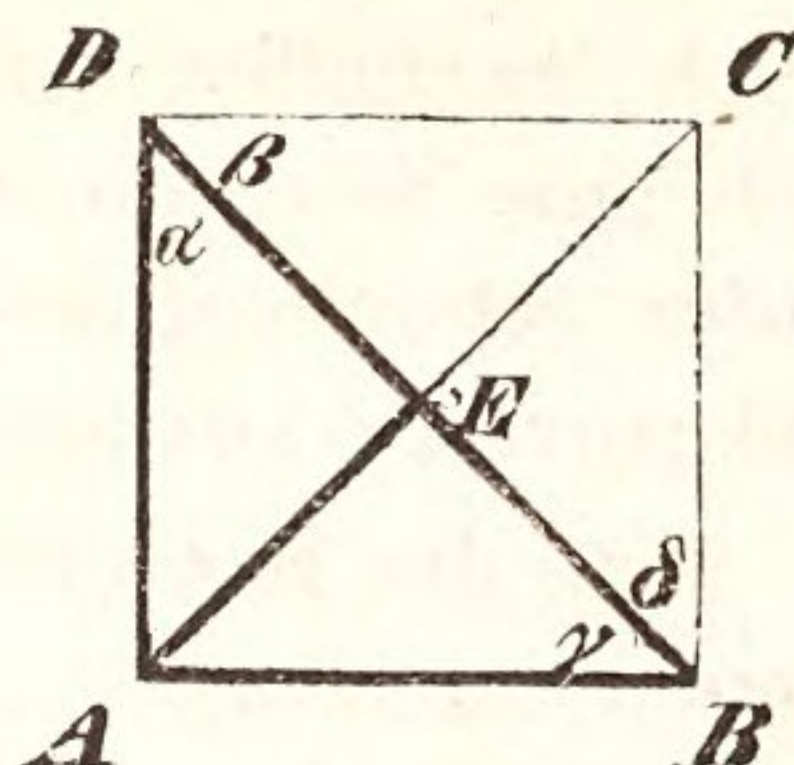
V. Das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck.

§ 30.

1. Theile das Quadrat durch eine Diagonale (Fig. 44). Es entstehen zwei congruente (warum?) gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke; also ist $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$; $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$; jeder ist demnach $= \frac{1}{2}R$ ($= 45^\circ$).

Lehrsatz. Die Winkel an der Basis eines gleichschenkligh-rechtwinkligen Dreiecks sind einander gleich; jeder beträgt $\frac{1}{2}R (= 45^\circ)$. Die Winkelsumme im gleichschenkligh-rechtwinkligen Dreieck ist gleich $2R (= 180^\circ)$.

Fig. 44.



2. Aufgabe. Einen Winkel von 45° zu zeichnen!

3. Die Linie AE (Fig. 44), welche die halbe Diagonale des Quadrats ist, steht auf der Hypotenuse BD senkrecht.

Erklärung. Das Loth, welches man von einer Ecke eines Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite fällt, heisst Höhe des Dreiecks; die Seite selbst heisst die zur Höhe zugehörige Grundlinie (Basis).

Lehrsatz. Die Höhe eines gleichschenkligh-rechtwinkligen Dreiecks theilt dasselbe in zwei ebensolche Dreiecke; sie halbirt die Hypotenuse. — Der Halbirungspunkt der Hypotenuse ist von allen Ecken gleichweit entfernt.

4. Aufgaben. 1. Ein gleichschenkligh-rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben ist a) eine Kathete; b) die Hypotenuse; c) die Höhe. (Bestimmte Beispiele.)

2. Dem gleichschenkligh-rechtwinkligen Dreiecke mit der Kathete $a = 25 \text{ mm}$ soll ein Kreis umgeschrieben werden.

VI. Die gerade Oblongsäule und das Rechteck.

§ 31.

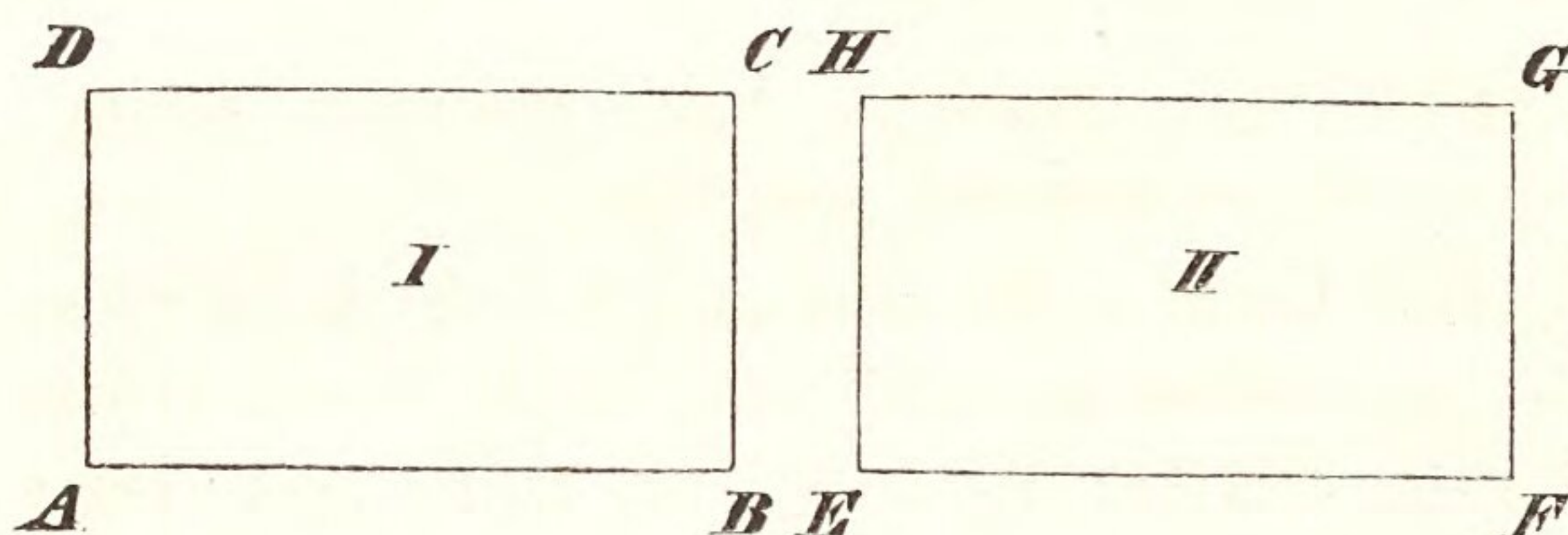
Betrachtung der geraden Oblongsäule.

1. Denke dir zwei oder mehrere völlig übereinstimmende (congruente) Würfel auf einander gesetzt, oder (allgemeiner) einen Würfel nach oben hin verlängert. Der entstandene Körper heisst gerade Quadratsäule. (Der Körper muss vorgezeigt und sein Entstehen vorgemacht werden.)

Denke dir jetzt zwei oder mehrere solcher Säulen, die durchaus gleich beschaffen sind, neben einander gestellt, oder eine solche Säule nach eine Seite hin vergrößert, so aber, dass diese Ausdehnung den beiden schon vorhandenen ungleich wird. Der entstandene Körper ist eine gerade rechteckige Säule oder eine gerade Oblongsäule.

Um die Beschaffenheit der den Körper einschliessenden Flächen kennen zu lernen, zeichnen wir eine auf die Tafel ab und versuchen nun, die anderen damit zur Deckung zu bringen. Es wird uns dies

Fig. 45.



nur bei je zwei gegenüberliegenden gelingen.

Fig. 45 stelle zwei solcher Vierecke dar. Lege II viermal auf I ohne Umdrehen, so dass $\angle E$ der

Reihe nach die $\angle A, B, C, D$ deckt, dann decken sich die Seiten nur in den Lagen 1 und 3. Es sind also die Winkel alle, von den Seiten aber nur die gegenüberliegenden gleich (§ 34, 3).

Erklärungen. a) Ein Viereck, in welchem die Winkel gleich, die Seiten aber ungleich sind, heisst Rechteck oder Oblongum.

b) Ein Körper, welcher von zwei Quadraten und vier congruenten Rechtecken begrenzt wird, heisst gerade Quadersäule.

c) Ein Körper, welcher von sechs Rechtecken begrenzt wird, heisst gerade Oblongsäule.

2. Benennungen (vergl. § 25, 1). Untere, obere Grundfläche; Seitenflächen; Grund- und Seitenkanten. Beide Säulen haben zwölf Kanten. Die Seitenkanten sind bei beiden einander gleich, die Grundkanten nur bei der quadratischen Säule. Beide Säulen haben acht Ecken. Dimensionen: Länge, Breite, Höhe.

3.

Uebungsstoff.

Rechnen. 1. Berechne den Umfang einer geraden Oblongsäule, wenn die drei Dimensionen gegeben sind! $l = 8 \text{ m}$; $5,74 \text{ m}$; $b = 4 \text{ m}$, 1000 mm ; $h = 10 \text{ m}$, 400 dm .

2. Die Grundkante einer geraden Quadratsäule sei a , die Höhe h ; wie gross ist der Umfang U ? $a = 5 \text{ m}, 2,5 \text{ m}; h = 9 \text{ m}, 45 \text{ dm}$.

3. Der Umfang einer geraden Oblongsäule sei U . Wie gross sind die Dimensionen, wenn sich Länge, Breite und Höhe wie die Zahlen m, n, o verhalten? $U = 264 \text{ cm}, 5,88 \text{ m}, 4 \text{ m}; m = 1, 5, 11; n = 2, 7, 15; o = 3, 9, 24$.

§ 32.

Anfertigung der geraden Quadrat- und der geraden Oblongsäule.

1. Wiederhole die Operation in § 26, 1 in Bezug auf das Rechteck.

Lehrsatz. Die Winkelsumme eines Rechtecks ist gleich $4R (= 360^\circ)$. Jeder Winkel ist also gleich $1R (= 90^\circ)$.

2. Aufgabe. (L. D. M.) Zeichne ein Rechteck aus den Seiten a und b ! $a = 0,03 \text{ m}; b = 75 \text{ mm}$.

3. (Vergl. § 26, 3.) Fig. 46 ist das Netz einer geraden Quadratsäule, Fig. 47 das einer geraden Oblongsäule.

Fig. 46.

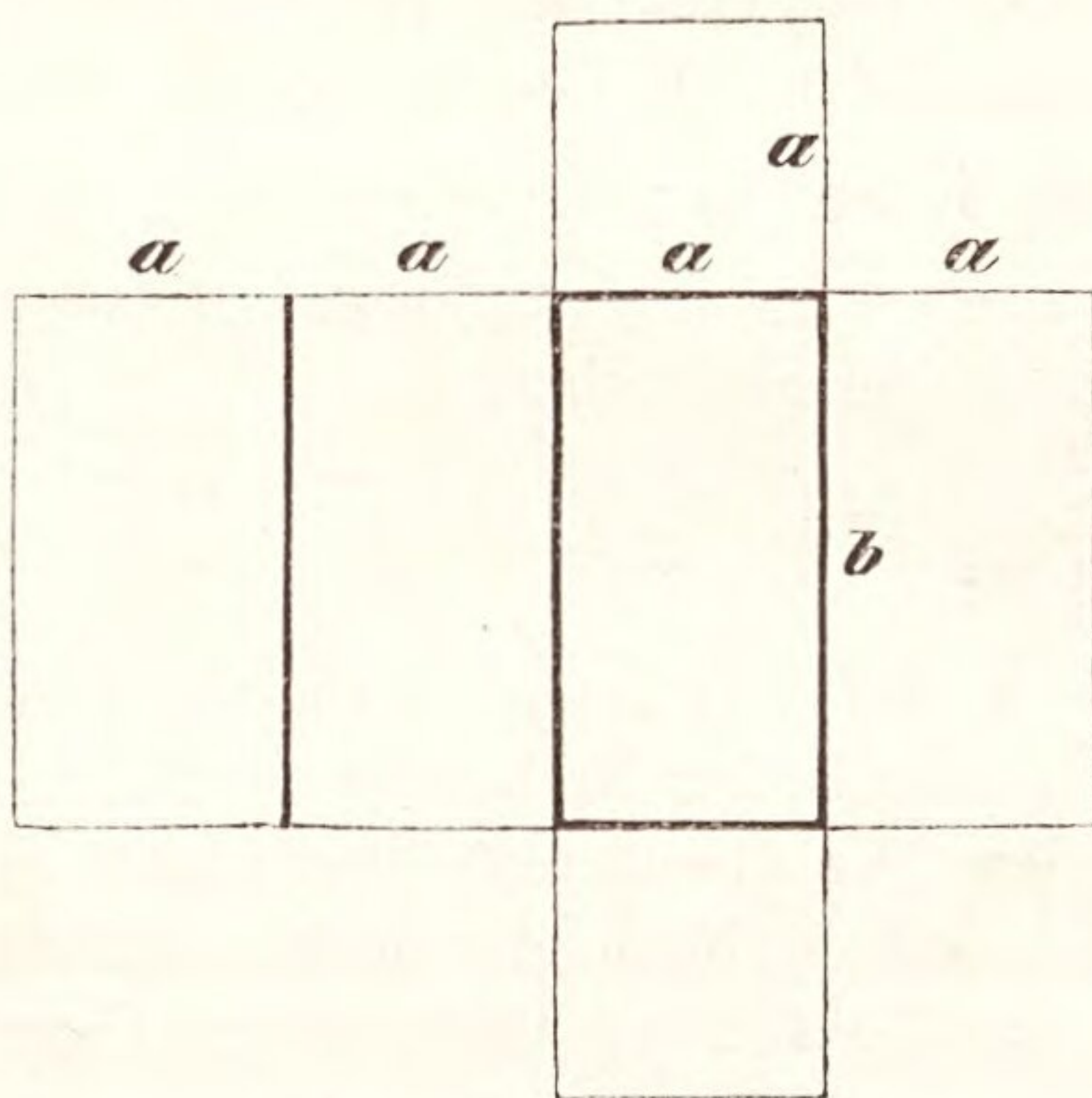
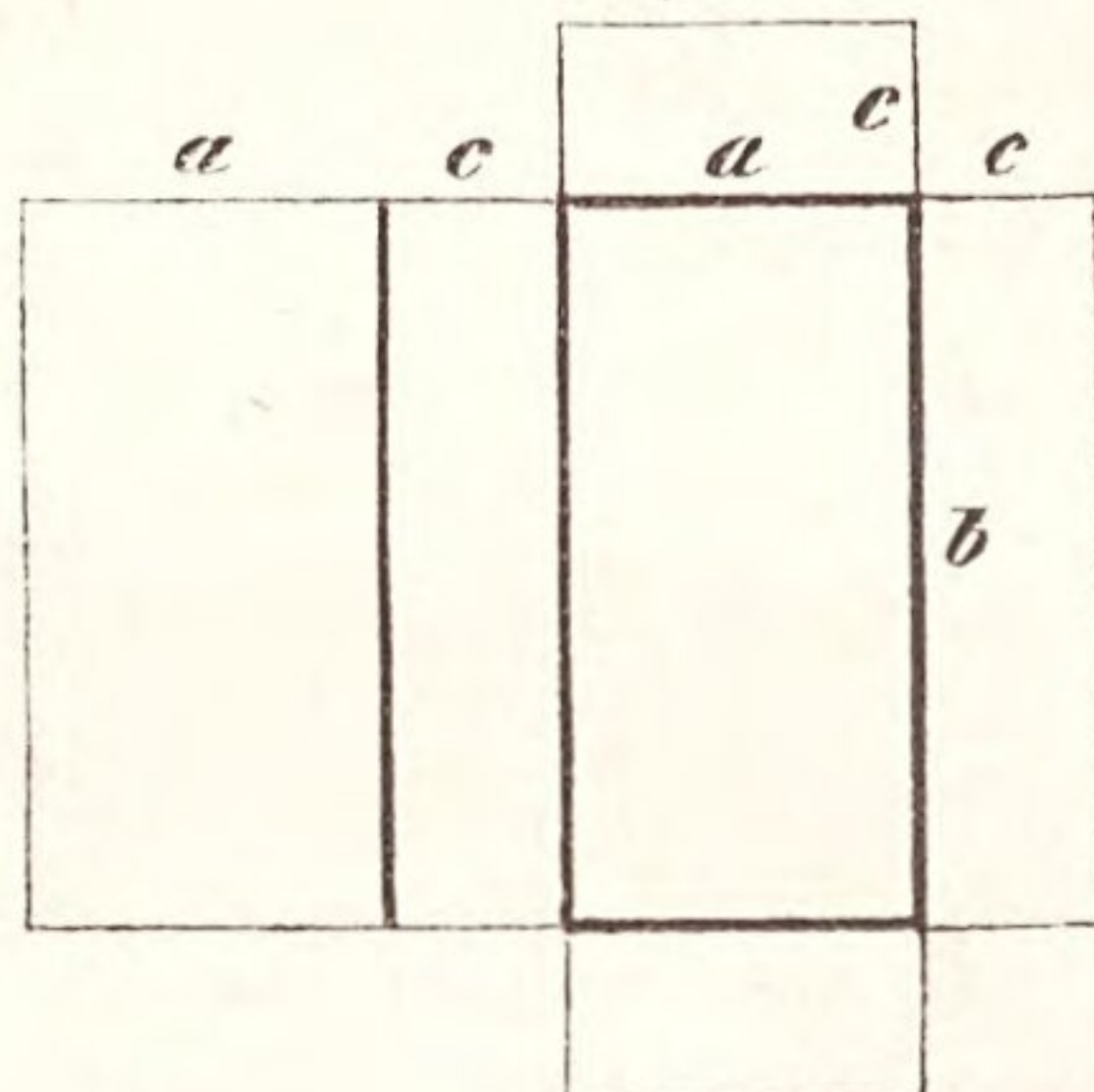


Fig. 47.



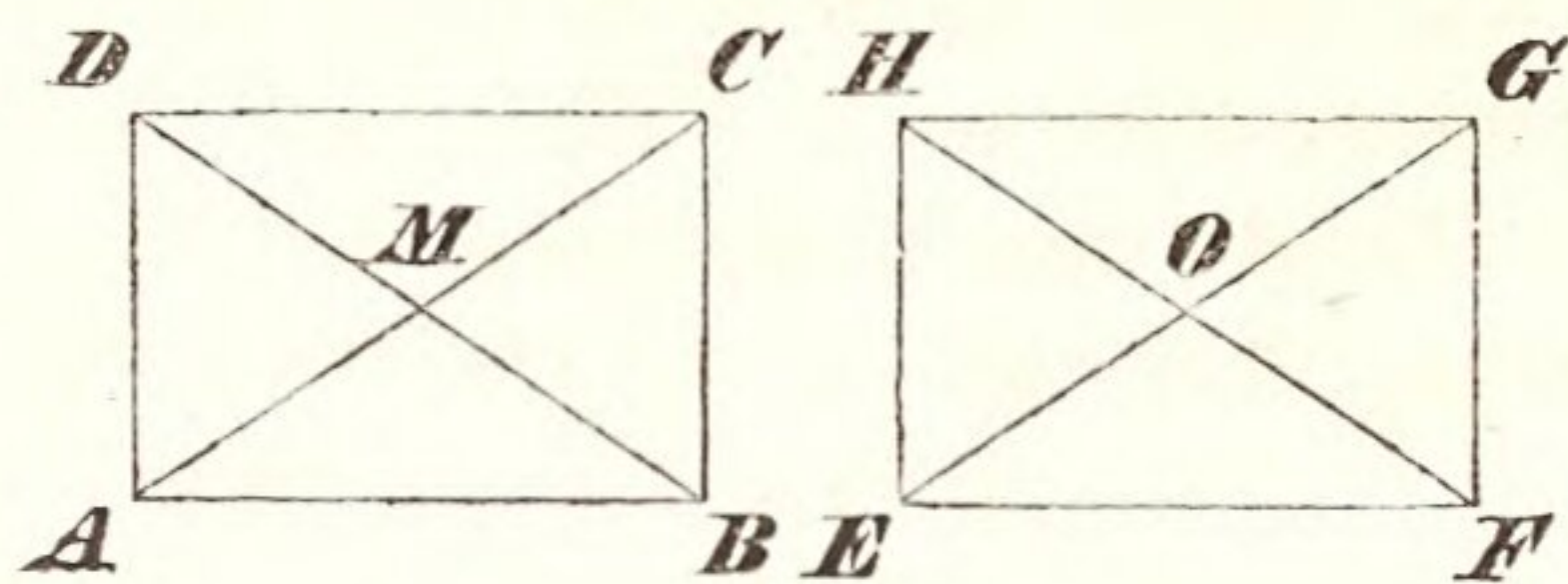
Aufgaben. a) Zeichne das Netz einer geraden Quadratsäule aus $a = 4 \text{ cm}, b = 75 \text{ mm}$; b) das einer geraden Oblongsäule aus $a = 4 \text{ cm}, b = 5 \text{ cm}, c = 3 \text{ cm}$; reisse die stark gezogenen Linien ein und klebe die Flächen zu Körpern zusammen.

Weitere Eigenschaften des Rechtecks.

§ 33.

1. Zeichne mittelst Durchstechens zwei congruente Rechtecke (Fig. 48) und bringe dieselben viermal, zweimal durch Verschieben

Fig. 48.



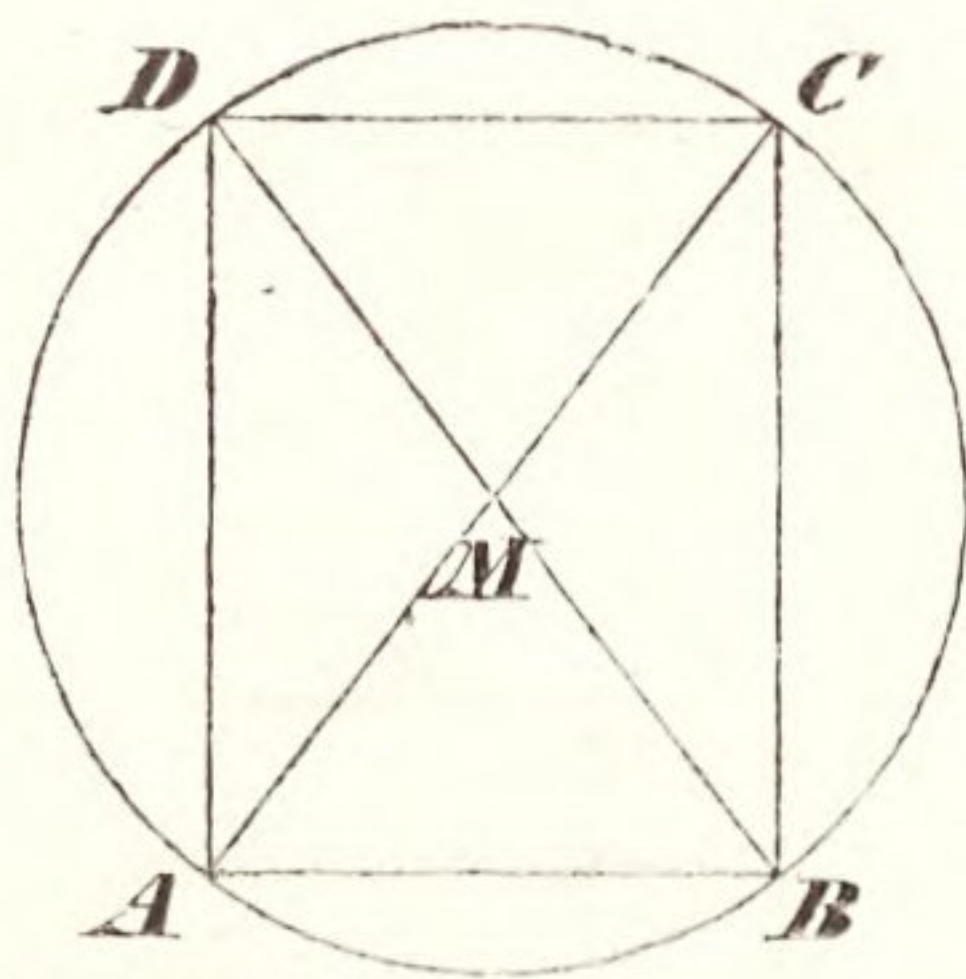
und zweimal durch Umklappen zur Deckung. Wohin fällt jedesmal AM , wohin AC ?

Lehrsatz. Die Diagonalen eines Rechtecks halbiren einander und sind gleichlang.

2. Controllire die gefundenen Wahrheiten durch Nachmessen der gezeichneten Figuren. Miss ferner die Winkel bei M . Ebenso die Theilwinkel an den Ecken z. B. $\angle DAM$.

Lehrsatz. Die Diagonalen eines Rechtecks stehen auf einander schief; sie halbiren die Winkel des Rechtecks nicht.

Fig. 49.



3. Erklärung. Der Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Rechtecks heisst Mittelpunkt desselben.

Lehrsatz. Der Mittelpunkt eines Rechtecks ist von den Ecken gleichweit entfernt. — Jedem Rechteck lässt sich ein Kreis umschreiben (Fig. 49).

Aufgabe. Einem gegebenen Rechteck einen Kreis umzuschreiben.

§ 34.

1. Zeichne eine Strecke $d =$ a) 0,5 dm; b) 64 mm; c) 0,046 m; d) beliebig lang; halbire dieselbe, ziehe durch den Halbirungspunkt unter schiefe Winkel eine Gerade, mache die Theile derselben gleich der Hälfte der ursprünglichen Strecke und verbinde die noch unverbundenen Punkte. Miss die Seiten und Winkel der entstandenen Figur!

Lehrsatz. Ein Viereck, in welchem die Diagonalen einander halbiren, gleich lang sind und auf einander schief stehen, ist ein Rechteck.

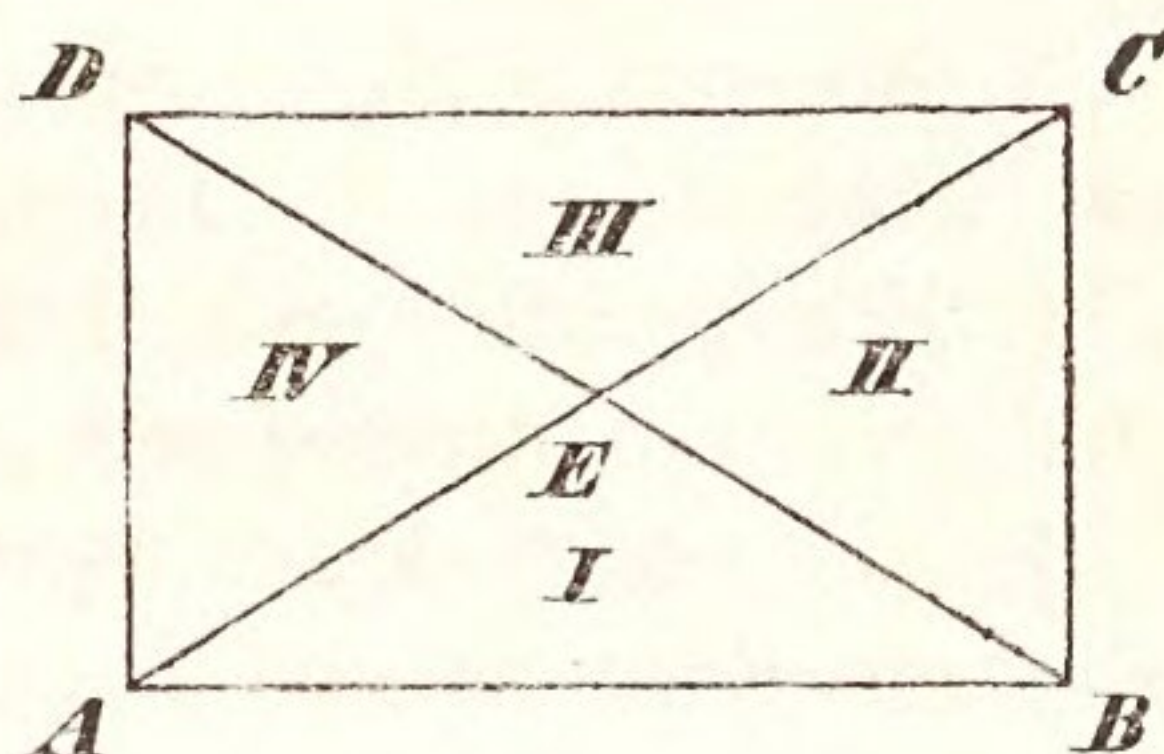
Aufgabe. Einem gegebenen Kreise ein Rechteck einzuschreiben, dessen eine Seite gleich dem Radius ist.

2. Zeichne wie in Fig. 48 zwei congruente Rechtecke aus den Diagonalen und bringe dieselben (ähnlich wie in § 33, 1) viermal zur

Deckung. Gleichheit der Winkel. Führe die Deckung in Gedanken aus und gieb an, warum die einzelnen Stücke auf einander fallen müssen!

3. Schneide in einem beliebig aus den Diagonalen gezeichneten Rechtecke (Fig. 50) die Dreiecke I bis IV aus und bringe die gegenüberliegenden Dreiecke auf zweifache Art zur Deckung! Führe die Operation an der gezeichneten Figur nur in Gedanken aus und gieb die Gründe für das Aufeinanderfallen der einzelnen Stücke an!

Fig. 50.



Lehrsatz. In jedem Rechtecke sind die gegenüberliegenden Seiten gleich.

4. Aufgaben. Ein Rechteck zu construiren, wenn gegeben sind: a) eine Seite und eine Diagonale; b) eine Seite und der Winkel zwischen ihr und einer Diagonale; c) eine Diagonale und der Winkel zwischen ihr und einer Seite; d) eine Diagonale und ein Winkel zwischen den Diagonalen.

§ 35.

1. In sämtlichen Dreiecken, in welche das Rechteck durch eine Diagonale getheilt wird, ist ein Winkel ein Rechter und die Katheten sind ungleich; es sind also ungleichseitig-rechtwinklige Dreiecke. Die Dreiecke, welche durch beide Diagonalen entstehen, haben je zwei gleiche Seiten, sind also gleichschenkelig.

Folgerung. Das Rechteck wird durch eine Diagonale in zwei congruente ungleichseitig-rechtwinklige, durch beide Diagonalen in vier gleichschenklige Dreiecke getheilt. Von letzteren sind je zwei Scheiteldreiecke (Erklärung der Benennung) einander congruent.

§ 36.

Uebungsstoff.

1. Welche Eigenschaften hat das Rechteck mit dem Quadrate gemeinschaftlich? In welchen Eigenschaften unterscheiden sie sich?

Rechnen. 2. Die beiden Dimensionen eines Rechtecks seien l und b ; wie gross ist der Umfang U ? $l = 25 \text{ cm}$, $1,2 \text{ m}$; $b = 3 \text{ dm}$, 420 cm .

3. Der Umfang eines Rechtecks sei u ; wie gross sind die beiden Dimensionen, wenn sie sich zu einander verhalten wie die Zahlen m und n ? $u = 54 \text{ m}, 510 \text{ cm}, 182 \text{ mm}$; $m = 4, 7, 20$; $n = 5, 10, 50$.

4. Der Umfang eines Rechtecks sei $4,5 \text{ dm}$; wie gross sind die beiden Dimensionen desselben, wenn die eine a) um 75 mm grösser; b) um $2,5 \text{ cm}$ kleiner als die andere ist?

5. Ein rechteckiger Spiegel hat $2,42 \text{ m}$ im Umfange; wie gross ist seine Länge, wenn die Breite $\frac{3}{8}$ der Länge beträgt?

6. Ein rechteckiger Hofraum hat einen Umfang von 72 m ; wie gross sind die Dimensionen, wenn er dreimal so lang als breit ist?

7. Ein rechteckiger Spiegel von 80 cm Länge und 30 cm Breite hat einen Rahmen von 12 cm Breite; um wieviel ist der äussere Umfang des Rahmens grösser als der innere?

8. Ein rechteckiger Garten von 50 m Länge und 30 m Breite, der mit einer seiner längeren Seiten an ein Haus stösst, soll auf den drei anderen Seiten mit Brettern umgeben werden; wieviel Bretter sind nothwendig, wenn jedes Brett 60 cm breit ist?

9. Ein 4 m langes und 30 cm breites Brett soll in drei gleiche Theile gesägt und diese Theile sollen wieder zusammengelegt werden, um eine Tischplatte zu geben; um wieviel wird der Umfang der Tischplatte von dem des Brettes verschieden sein?

Zeichnen. Zeichne ein Rechteck, 10. in welchem die Diagonale $d = 48 \text{ mm}$ ist und sich zu einer Seite wie $4:3$ verhält! 11. in welchem die Diagonale $d = 5 \text{ cm}$ ist und mit einer Seite einen Winkel von 40° einschliesst! 12. mit der Diagonale $d = 45 \text{ mm}$, in welchem der eine Winkel zwischen beiden Diagonalen die Hälfte seines Nebenwinkels ist! 13. mit den Seiten $l = 3 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$ und dann den umgeschriebenen Kreis!

14. Schreibe einem Kreise mit dem Halbmesser $r = 18 \text{ mm}$ ein Rechteck ein, in welchem die eine Seite Sehne eines Bogens von 50° ist!

15. Schreibe dem Kreise mit dem Durchmesser $d = 36 \text{ mm}$ ein Rechteck ein, in welchem die eine Seite einem Centriwinkel von 105° als Sehne entspricht!

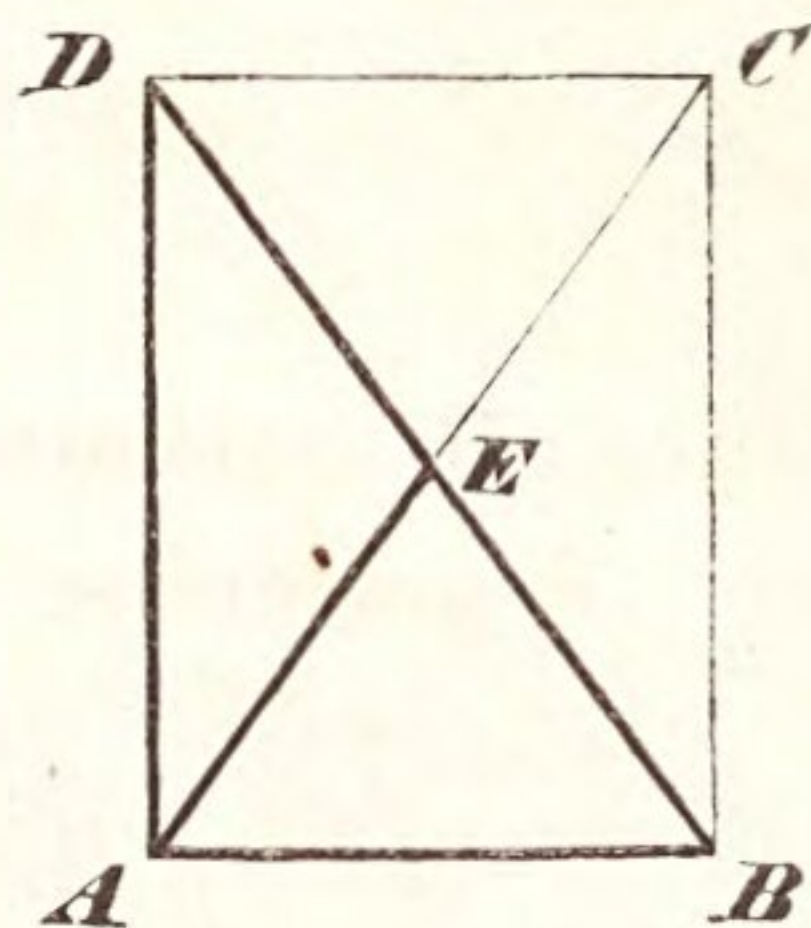
16. Zeichne mehrere Rechtecke, welche a) eine Seite; b) eine Diagonale; c) einen der von den Diagonalen eingeschlossenen Winkeln gemeinschaftlich haben.

VII. Das ungleichseitig-rechtwinklige Dreieck.

§ 37.

1. Theile das Rechteck $ABCD$ (Fig. 51) durch eine Diagonale; alsdann entstehen zwei congruente ungleichseitig-rechtwinklige Dreiecke. Umgekehrt kann man auch jedes ungleichseitig-rechtwinklige Dreieck durch geeignetes Hinzufügen eines ihm congruenten zu einem Rechteck vervollständigen. Die Winkel des einen Dreiecks sind also der Reihe nach den Winkeln des anderen gleich. Daher:

Fig. 51.



Lehrsatz. In jedem ungleichseitig-rechtwinkligen Dreiecke ist die Winkelsumme gleich $2R$ ($= 180^\circ$).

Zusatz. Mit Berücksichtigung von § 30, 1 ergibt sich, dass der Satz von jedem rechtwinkligen Dreiecke gilt.

2. Da $\hat{A}$ (Fig. 51) $1R$ ist, so muss die Summe von $\hat{B}$ und $\hat{D}$ ebenfalls gleich $1R$ sein. Mit Rücksicht auf § 30, 1 ergibt sich also:

Lehrsatz. Die Winkel an der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sind Complementswinkel.

3. Punkt E (Fig. 51) ist von den Ecken gleichweit entfernt (§ 33, 3). Mit Berücksichtigung von § 30, 3 ergibt sich also:

Lehrsatz. Der Halbirungspunkt der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist von den Ecken desselben gleichweit entfernt.

Jedem rechtwinkligen Dreiecke lässt sich ein Kreis umschreiben.

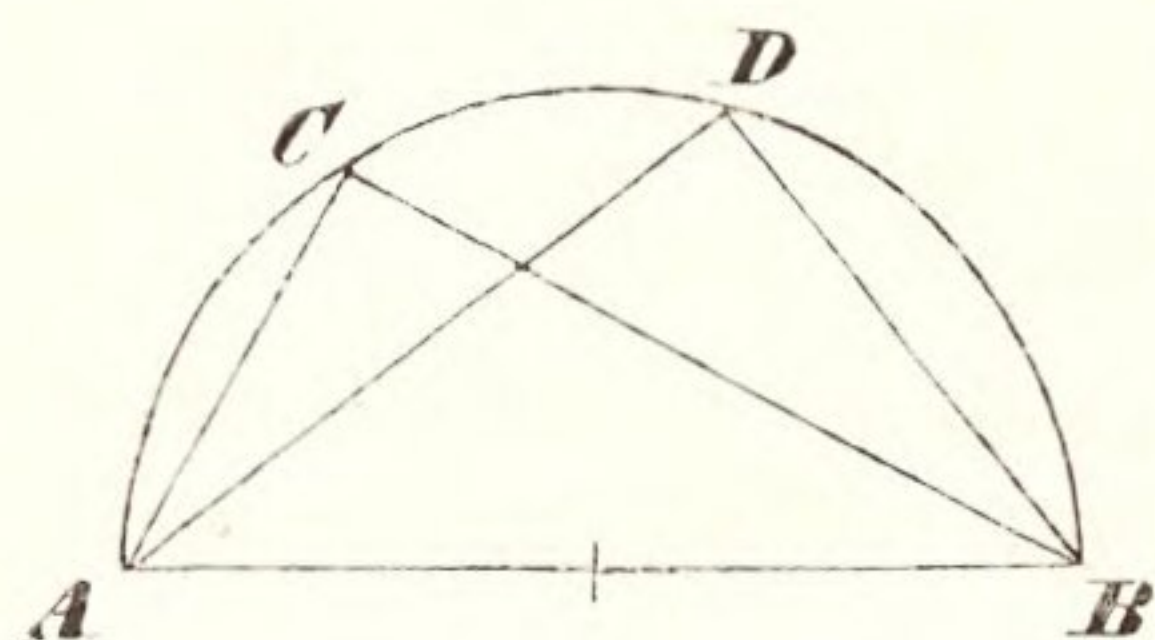
4. Aufgaben. a) Einem gegebenen rechtwinkligen Dreiecke einen Kreis umzuschreiben.

b) Einem Kreise ein rechtwinkliges Dreieck einzuschreiben, wenn gegeben ist 1. eine Kathete, kleiner als der Durchmesser, 2. ein spitzer Winkel.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind: c) beide Katheten; d) die Hypotenuse und eine Kathete; e) eine Ka-

thete und der anliegende spitze Winkel; f) eine Kathete und ihr Gegenwinkel.

Fig. 52.



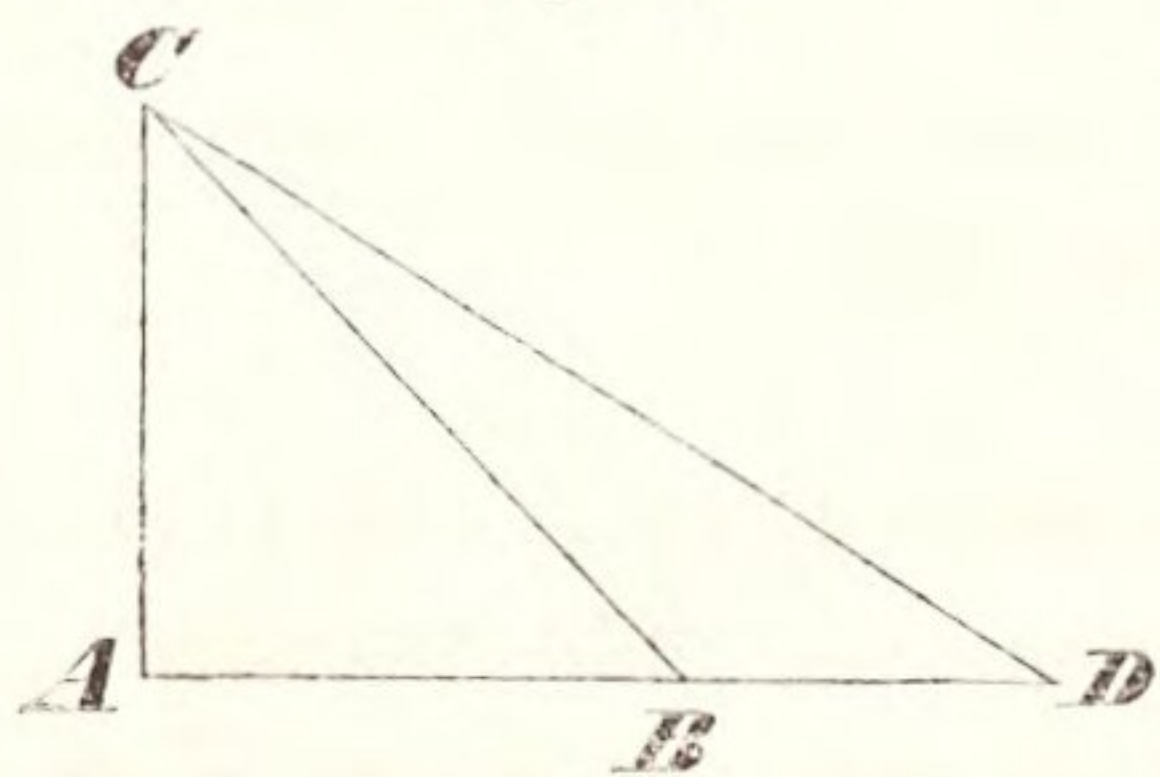
§ 38.

1. Sind ABC und ABD zwei rechtwinklige Dreiecke über derselben Hypotenuse, so haben die umgeschriebenen Kreise derselben AB zum Durchmesser; sie fallen also zusammen.

Lehrsatz. Die Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke über derselben Hypotenuse liegen auf der Peripherie eines über der Hypotenuse als Durchmesser beschriebenen Kreises.

Aufgaben. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind: a) die Hypotenuse und ein spitzer Winkel; b) die Hypotenuse und eine Kathete (vergl. § 37, 4d).

Fig. 53.



2. ABC sei ein gleichschenkligh-rechtwinkliges Dreieck. Lass nun CB sich um C drehen bis D . Dann wächst Kathete AB (sie wird grösser wie AC); gleichzeitig wächst $\angle C$. Da aber $\hat{C} + \hat{B} = 1R$, so muss $\hat{B}$ abnehmen. Im Dreieck ACD ist also $\hat{C} > \hat{D}$.

Lehrsatz. In jedem ungleichseitig-rechtwinkligen Dreiecke liegt der grösseren Kathete der grössere Winkel gegenüber.

§ 39.

Uebungsstoff.

1. Welche Eigenschaften hat das ungleichseitig-rechtwinklige Dreieck mit dem gleichschenkligh-rechtwinkligen gemein? In welchen unterscheiden sie sich?

Rechnen. 2. In einem rechtwinkligen Dreiecke sei der eine spitze Winkel fünfmal so klein als der andere; wie gross ist jeder von ihnen?

3. In einem rechtwinkligen Dreiecke verhalten sich die spitzen Winkel wie 3:7; wie gross ist jeder von ihnen?

Zeichnen. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck: 4. in welchem sich die Katheten wie 2:5 verhalten; ergänze es zu einem Rechteck;

5. in welchem die eine Kathete die Hälfte der Hypotenuse ist; 6. mit der Hypotenuse von 35 mm und in welchem der eine spitze Winkel die Hälfte des anderen ist; 7. mit einer Kathete von 25 mm und in welchem der ihr anliegende Winkel $= \frac{3}{4} R$ ist; 8. mit einer Kathete von 45 mm und in welchem ihr Gegenwinkel viermal so gross als der anliegende Winkel ist!

9. Schreibe einem rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten $a = 40$ mm, $b = 25$ mm einen Kreis um!

10. Schreibe einem Kreise mit dem Halbmesser $r = 2\frac{1}{2}$ cm ein rechtwinkliges Dreieck ein, in welchem eine Kathete der Hälfte des Halbmessers gleich ist!

11. Schreibe einem Kreise mit dem Durchmesser $d = 42$ mm ein rechtwinkliges Dreieck ein, in welchem sich der eine spitze Winkel zu dem andern wie 2:3 verhält!

12. Zeichne mehrere rechtwinklige Dreiecke, welche a) eine Kathete; b) einen spitzen Winkel; c) die Hypotenuse gemeinschaftlich haben.

VIII. Die Symmetrie.

§ 40.

1. Nimm ein Stück Papier, falte es in der Mitte durch, breite es dann wieder auseinander, zeichne auf die eine Hälfte mit Farbe (Tinte) eine beliebige Figur und klappe nun die beiden Hälften wieder zusammen. Es entsteht auf der anderen Hälfte ein Abdruck der gezeichneten Figur. Wiederhole das Verfahren, indem du auf die eine Hälfte eine Gerade, einen Punkt, ein Dreieck zeichnest und dann zusammenklappst.

Erklärung. Zwei Gebilde in einer Ebene heissen symmetrisch in Bezug auf eine Gerade in der Ebene, wenn sie zu beiden Seiten derselben so liegen, dass sie beim Zusammenklappen der durch die Gerade entstandenen Ebenenhälften einander decken. Die Gerade, um welche die Drehung erfolgt, heisst die Symmetrale oder die Axe der Symmetrie (symmetrische Axe).

§ 41.

Grössenbeziehung symmetrischer Gebilde.

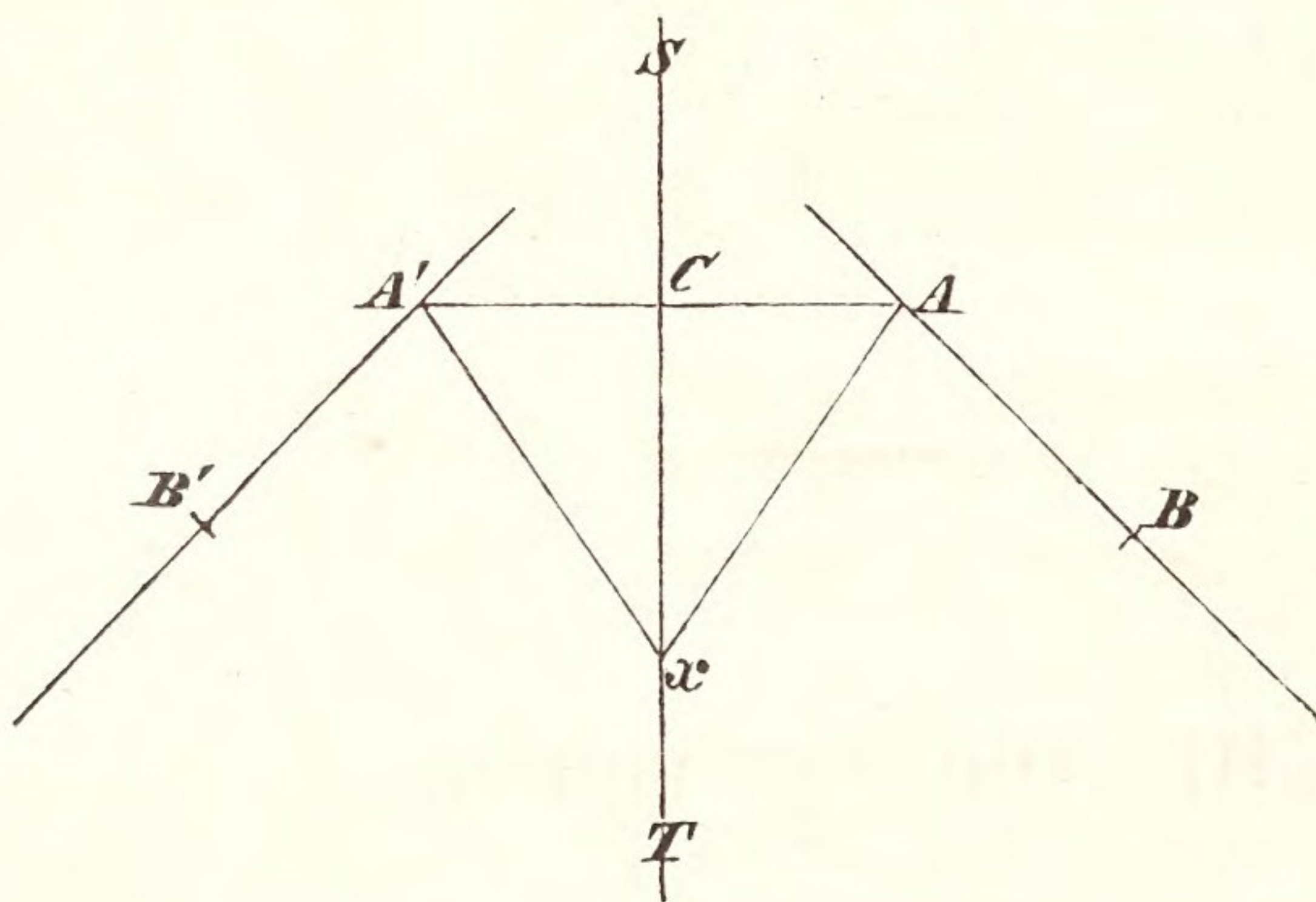
Da sich symmetrische Gebilde beim Zusammenlegen der beiden Ebenenhälften decken, so folgt:

Lehrsatz. Symmetrische Strecken sind gleich; symmetrische Winkel sind gleich; symmetrische Figuren sind congruent.

§ 42.

Symmetrische Punkte.

Fig. 54.



1. A und A' in Fig. 54 seien symmetrisch. Wohin fällt beim Umklappen CA , wohin $\angle SCA$? Wie gross ist derselbe demnach?

Lehrsatz. Die Strecke, welche zwei symmetrische Punkte mit einander verbindet, wird durch die Symmetrale halbiert und steht auf derselben senkrecht.

Ebenso leicht wird eingesehen:

Lehrsatz (Umkehrung). Zwei Punkte sind symmetrisch, wenn ihre Verbindungslinie durch die Symmetrale halbiert wird und auf derselben senkrecht steht.

2. X sei ein beliebiger Punkt der Symmetralen; A und A' aber seien wieder symmetrische Punkte. Wohin fällt beim Zusammenklappen XA ? (Fig. 54.)

Lehrsatz. Jeder Punkt der Symmetralen ist von zwei symmetrischen Punkten gleichweit entfernt.

3. A sei symmetrisch zu A' ; B zu B' . Wohin fällt beim Zusammenklappen AB ? (Fig. 54.)

Lehrsatz. Die Verbindungslinie zweier Punkte ist symmetrisch zur Verbindungslinie ihrer symmetrischen Punkte.

4. Aufgaben. a) Die Symmetrale und ein Punkt sind gegeben; construiren den symmetrischen Punkt!

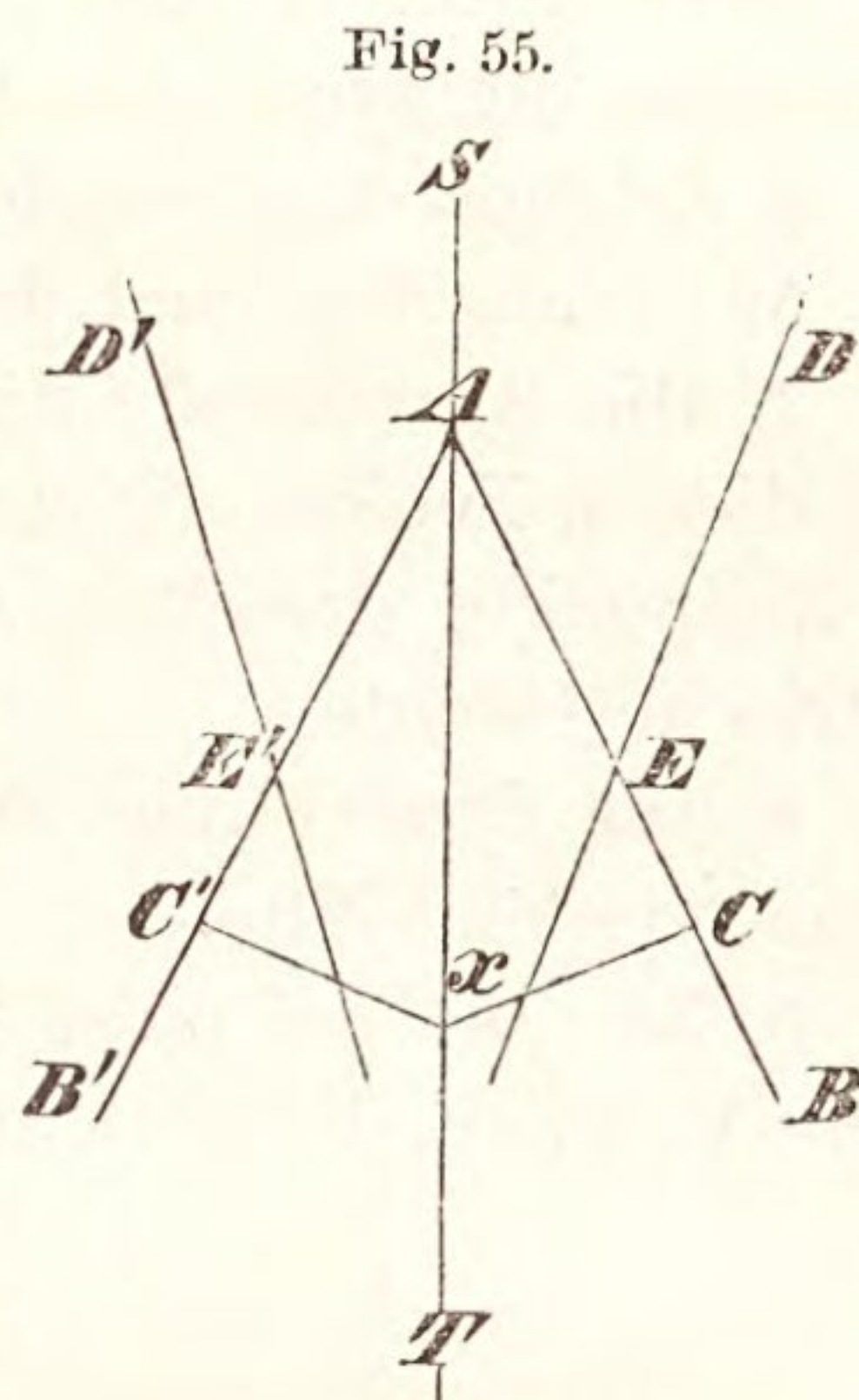
b) Zeichne einen Punkt, der 4 cm von der Symmetralen entfernt ist und den dazugehörigen symmetrischen Punkt!

§ 43.

Symmetrische Geraden.

1. ST sei Symmetrale (Fig. 55), AB schneide die Symmetrale in A ; legt man nun die Ebenenhälften zusammen, so kommt AB in die Lage AB' :

Lehrsatz. Schneidet eine von zwei symmetrischen Geraden die Symmetrale, so schneidet die andere sie in demselben Punkte.



2. $\angle BAT$ deckt den $\angle B'AT$, daher:

Lehrsatz. Der Winkel zwischen zwei symmetrischen Geraden wird durch die Symmetrale halbiert.

Ebenso leicht ist einzusehen:

Lehrsatz (Umkehrung). Zwei Geraden sind symmetrisch, wenn sie sich auf der Symmetralen schneiden und mit ihr gleiche Winkel bilden.

3. X sei ein beliebiger Punkt der Symmetralen (Fig. 55). Fälle $XC \perp AB$ und klappe um. Dann ist XC auch senkrecht auf AB' . Da es nun von einem Punkte nur ein Loth auf eine Gerade giebt (der Satz wird hier der unmittelbaren Anschauung entlehnt, später jedoch streng erwiesen), so folgt:

Lehrsatz. Jeder Punkt der Symmetralen ist von zwei symmetrischen Geraden gleichweit entfernt.

4. DE sei symmetrisch zu $D'E'$; AB zu $A'B'$; klappe zusammen! E fällt auf E' (Fig. 55).

Lehrsatz. Der Durchschnittspunkt zweier Geraden ist symmetrisch zum Durchschnittspunkt ihrer symmetrischen Geraden.

Zusatz. Der Satz gilt auch von krummen Linien. Doch muss man, da hierbei mehrere Durchschnittspunkte vorkommen, darauf achten, dass der Satz sich nur auf die entsprechenden Durchschnittspunkte bezieht.

§ 44.

Uebungsstoff.

Zeichnen. 1. Die Symmetrale und eine Gerade sind gegeben, construiere die symmetrische Gerade. (Zwei Lösungen.)

2. Zeichne eine Gerade, welche die Symmetrale unter einem Winkel von 59° schneidet, und dann die symmetrische Gerade.

3. Die Symmetrale und ein Punkt auf ihr sind gegeben. Zeichne von diesem Punkte aus eine Strecke $= 0,075$ m unter beliebigem Winkel, im Endpunkte derselben die Senkrechte und dann zu dieser die symmetrische Gerade.

4. Die Symmetrale und ein Winkel sind gegeben, construiere den symmetrischen Winkel.

5. Zeichne auf einer Seite der Symmetralen a) ein Dreieck; b) ein Viereck; c) ein Fünfeck und zu jeder Figur die symmetrische.

§ 45.

Unmittelbare Anwendungen.

1. Errichtet man auf einer Strecke die Mittelsenkrechte, so sind nach § 42, 1 die Endpunkte in Bezug auf die Senkrechte symmetrisch; daher nach § 42, 2:

Folgesatz. Jeder Punkt der Mittelsenkrechten einer Strecke ist von den Endpunkten derselben gleichweit entfernt.

2. Halbirt man einen Winkel, so sind die Schenkel nach § 43, 2 symmetrisch; folglich nach § 43, 3:

Folgesatz. Jeder Punkt der Halbirungslinie eines Winkels ist von den Schenkeln desselben gleichweit entfernt.

IX. Anwendung der Symmetrie auf den Kreis.

§ 46.

1. Zeichne einen Kreis (Fig. 56) und in demselben einen Durchmesser AB , schneide den Kreis aus und falte ihn längs AB zusammen.

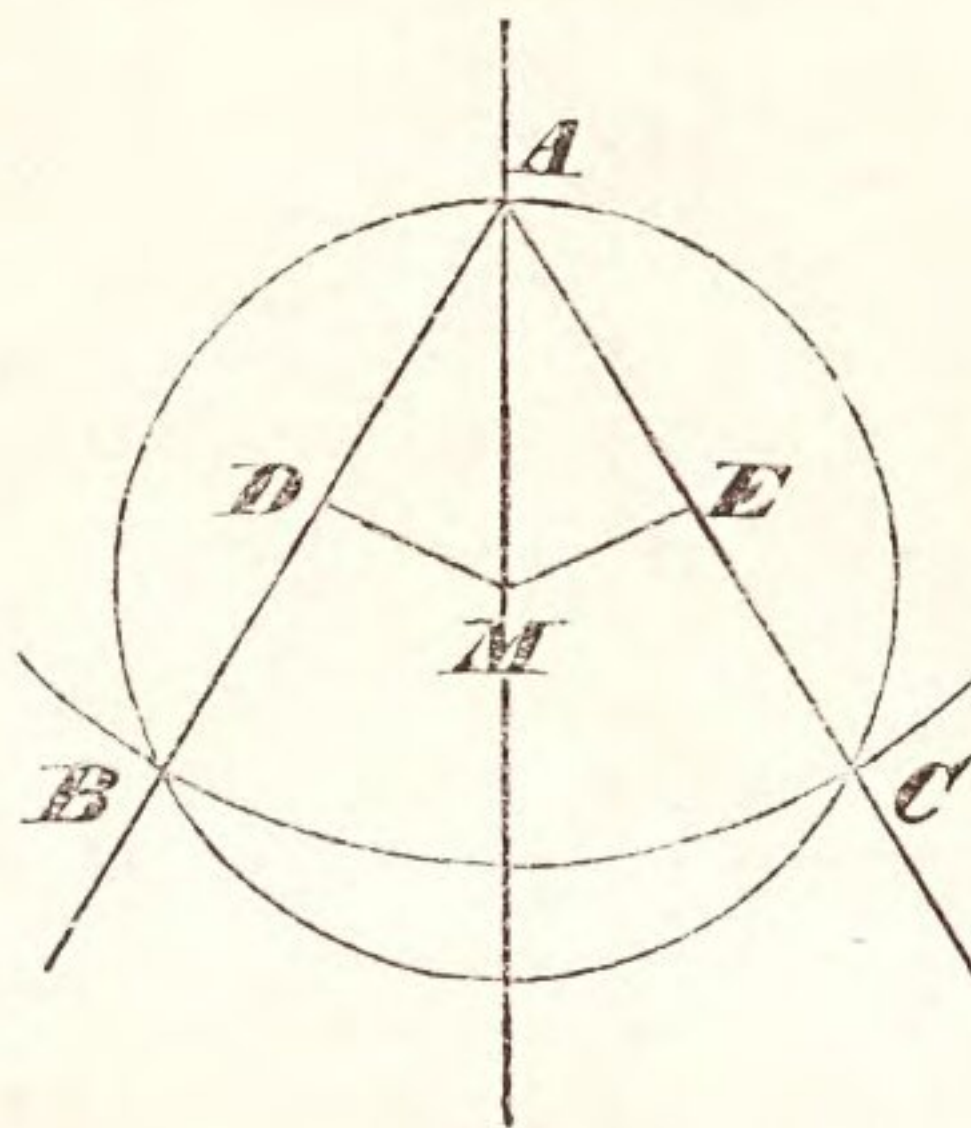
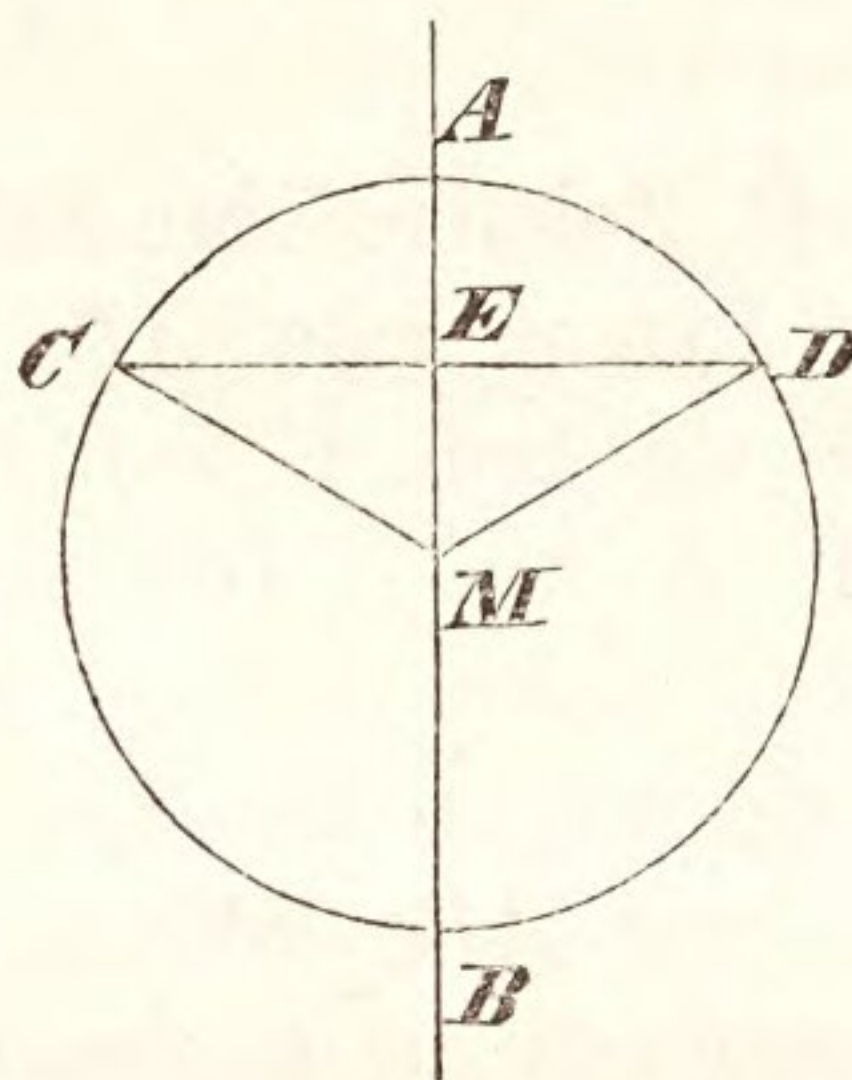
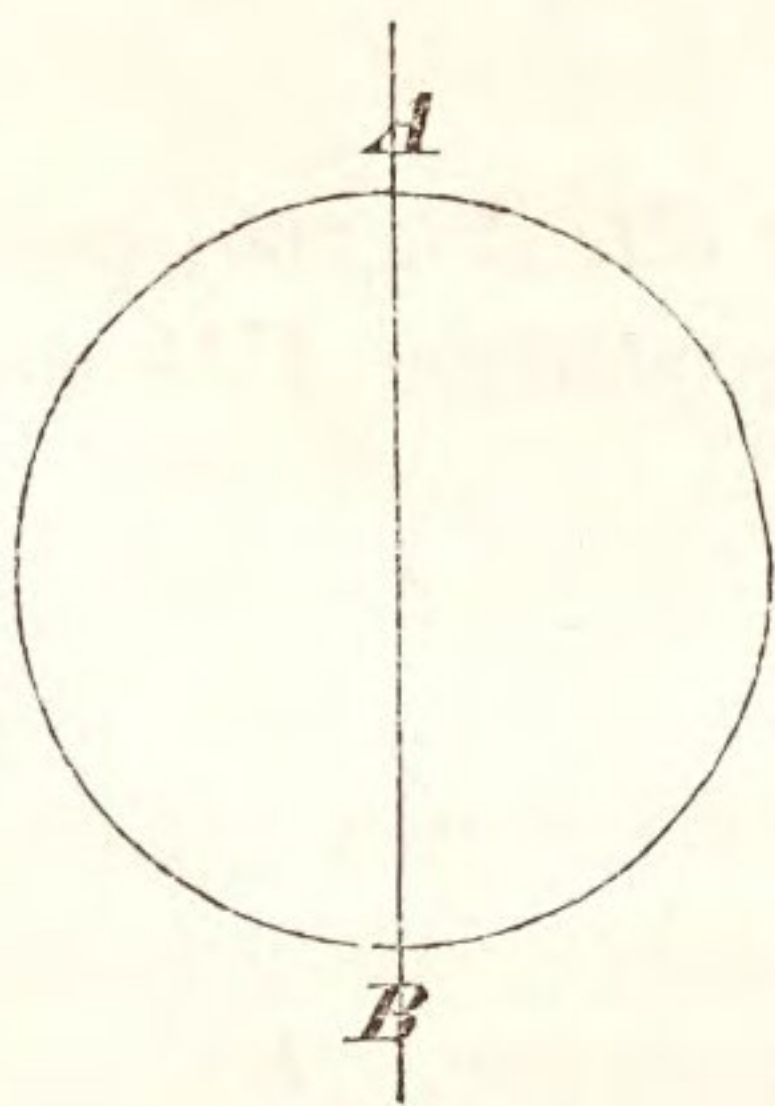
Lehrsatz. Jeder Durchmesser eines Kreises ist Symmetrale desselben.

2. CD (Fig. 57) sei eine beliebige Sehne. Ziehe den senkrechten Durchmesser AB ; dann ist die rechte Kreishälfte symmetrisch zur linken und ED zu EC (warum?), folglich auch D zu C , DM zu CM .

Fig. 56.

Fig. 57.

Fig. 58.



Lehrsatz. Fällt man vom Mittelpunkt eines Kreises die Senkrechte auf eine Sehne, so halbiert dieselbe die Sehne, den zugehörigen Centriwinkel und Bogen.

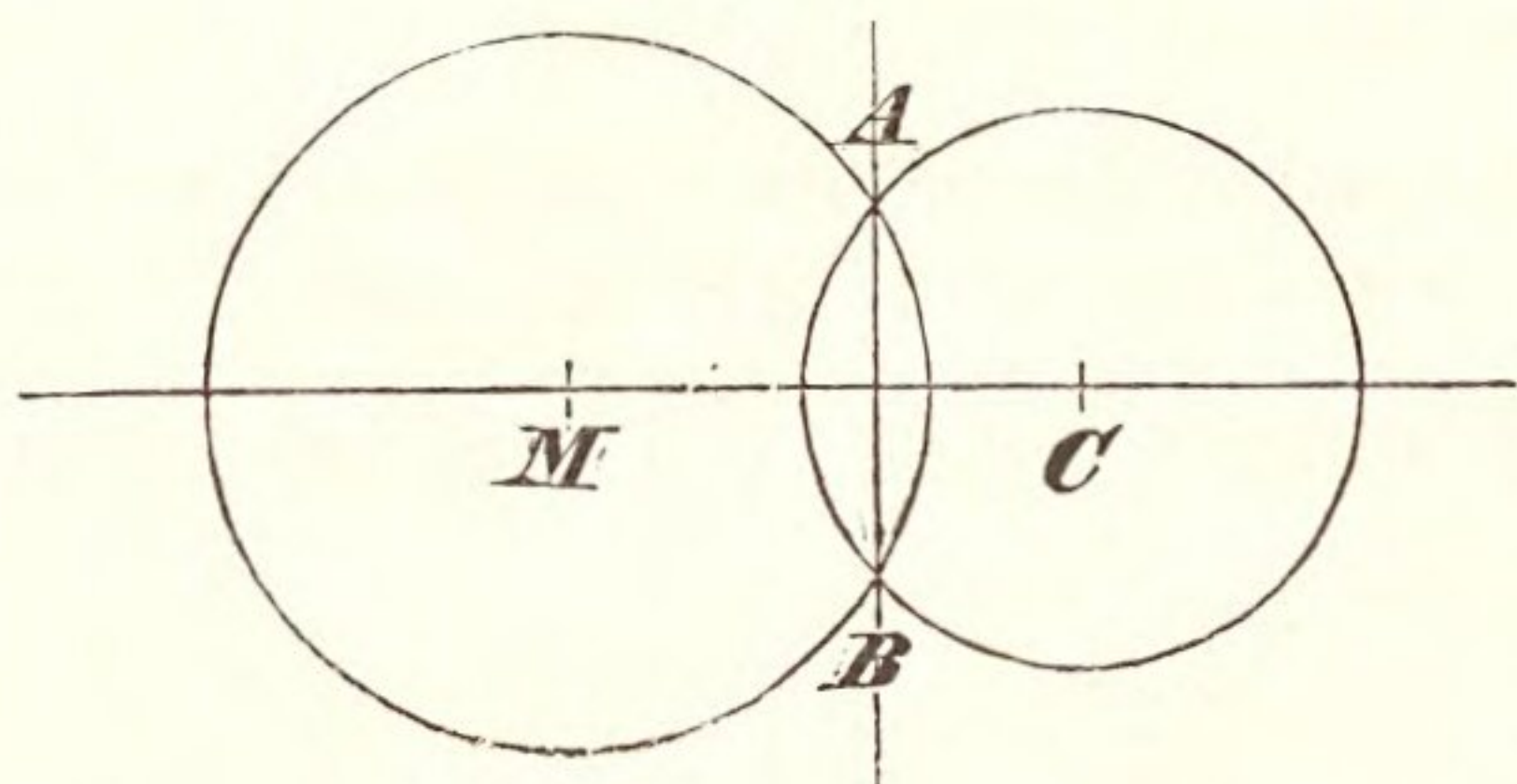
3. Zeichne zwei gleiche Sehnen AB und AC , fälle $MD \perp AB$ und $ME \perp AC$ (Fig. 58), ziehe AM und betrachte dieselbe als Symmetrale; schlage dann mit AC einen Kreis um A , welcher durch B geht (warum?). Dann sind die rechten Kreishälften symmetrisch zu den linken, also auch B zu C . Welche Strecken müssen beim Zusammenklappen auf einander fallen?

Lehrsatz. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkte.

Anmerkung. Gilt der Satz auch, und wie lässt er sich dann beweisen, wenn die Sehnen nicht zusammenstossen?

4. Erklärung. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Kreise heisst Centrale. Schneiden sich die Kreise, so heisst die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte die gemeinschaftliche Sehne.

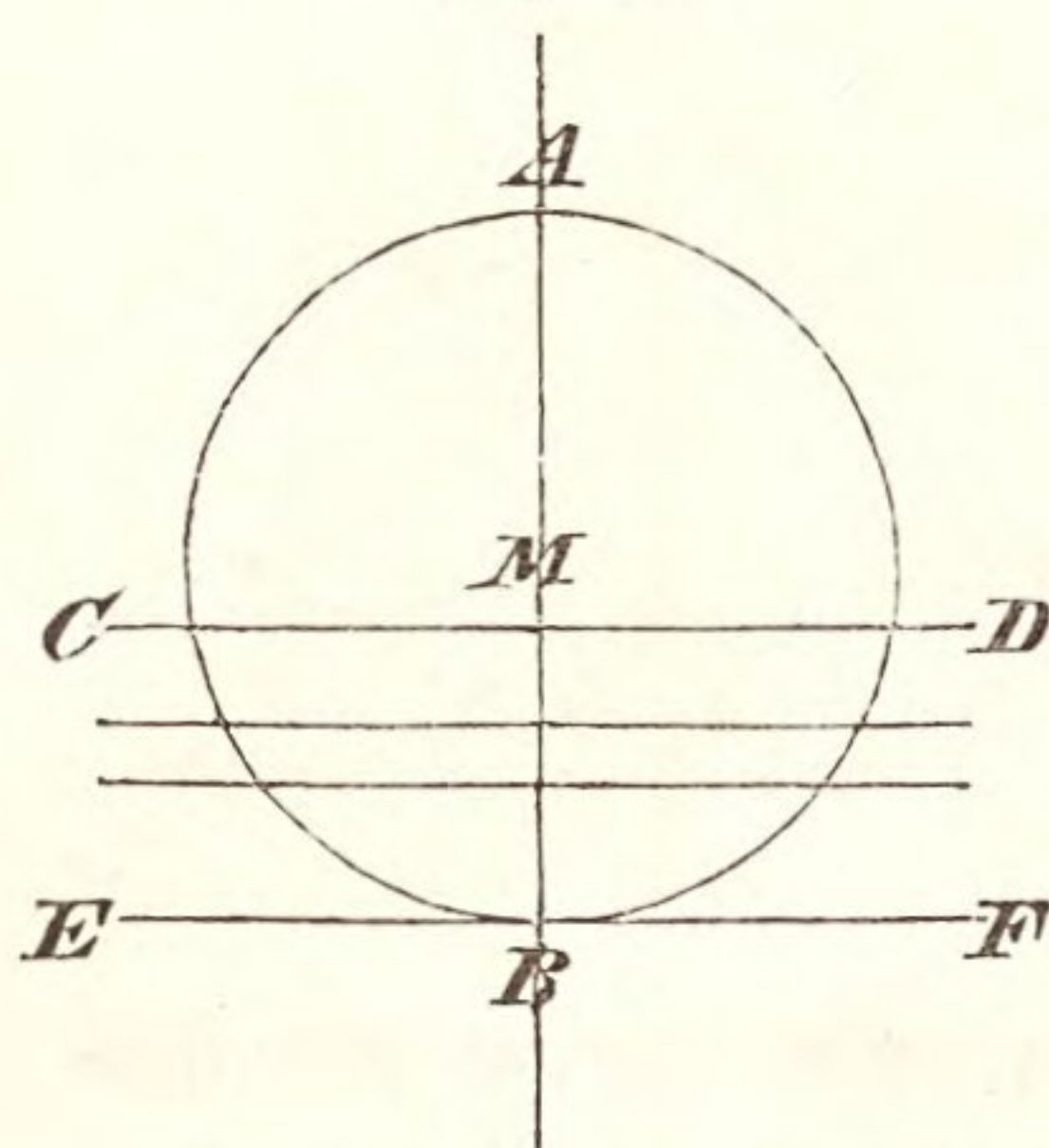
Fig. 59.



M und C (Fig. 59) seien zwei sich schneidende Kreise, A und B ihre Durchschnittspunkte. Betrachtet man MC als Symmetrale, so sind die oberen Kreishälften symmetrisch zu den unteren. Folglich auch A zu B .

Lehrsatz. Die Centrale zweier sich schneidenden Kreise steht auf der gemeinschaftlichen Sehne senkrecht und halbirt dieselbe.

Fig. 60.



5. Zeichne eine Sehne CD (Fig. 60) und ihre Symmetrale AB . Verschiebe CD so, dass sie immer senkrecht auf AB bleibt, nach B hin. Die Endpunkte der Sehne rücken dabei immer näher zusammen und da sie wegen der Symmetrie immer gleichweit von AB entfernt bleiben, so müssen sie endlich in B zusammenfallen. EF hat daher nur einen Punkt mit dem Kreise gemeinschaftlich.

Erklärung. Eine Gerade, welche nur einen Punkt mit dem Kreise gemeinschaftlich hat, heisst Tangente, der gemeinschaftliche Punkt heisst Berührungspunkt.

Lehrsätze. a) Der Radius nach dem Berührungspunkte einer Tangente steht senkrecht auf derselben.

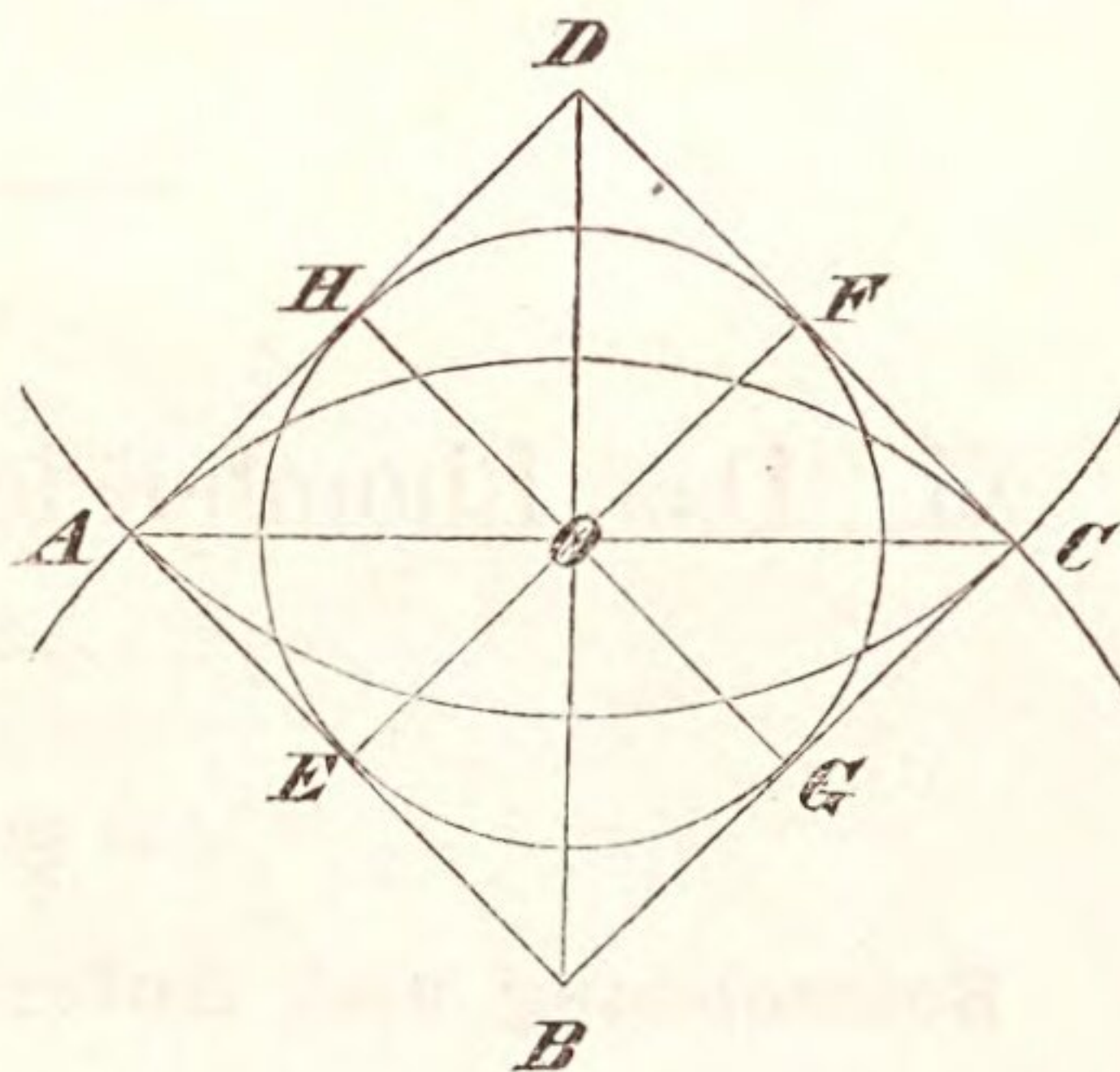
b) Eine Gerade ist Tangente, wenn sie auf einem Radius in seinem Endpunkte senkrecht steht.

X. Anwendung der Symmetrie auf Quadrat und Rechteck.

§ 47.

1. $ABCD$ (Fig. 61) sei ein Quadrat; betrachte DB als Symmetrale und beschreibe mit DA um D und mit BA um B Kreise. Dann ist A symmetrisch zu C , folglich halbiert DB die AC und steht auf ihr senkrecht. Ebenso kann AC als Symmetrale betrachtet werden (vergl. § 27, 2; § 29, 4).

Fig. 61.



Lehrsatz. Jede Diagonale des Quadrats ist Symmetrale desselben.

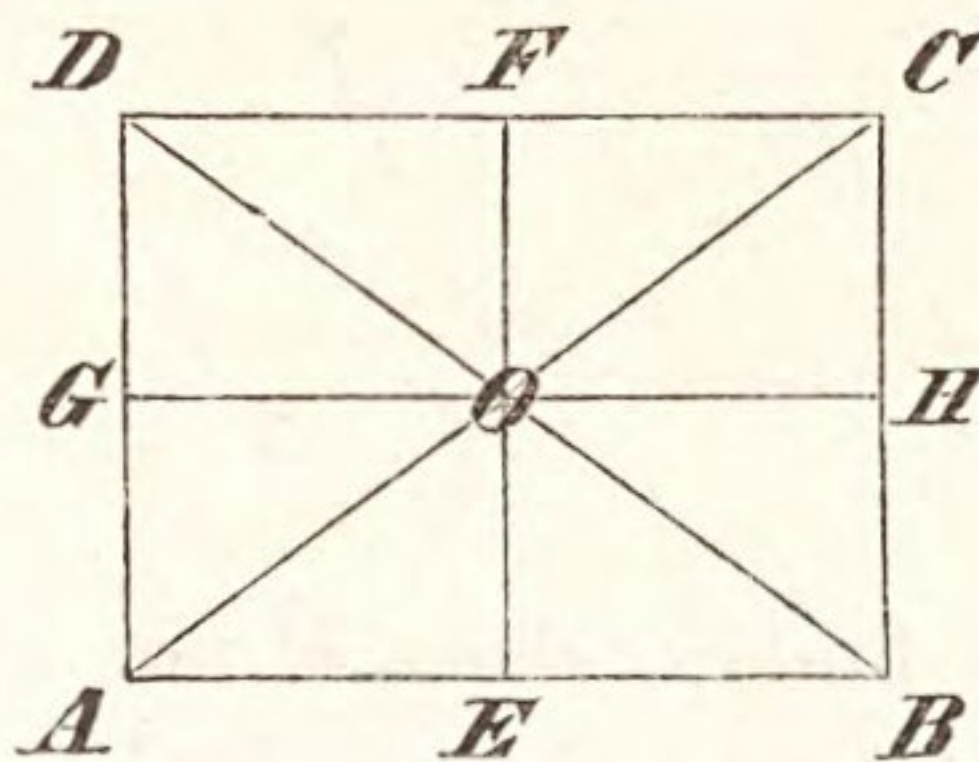
2. Wegen der doppelten Symmetrie haben die Seiten gleichen Abstand vom Mittelpunkt. Beschreibt man also mit diesem Abstände einen Kreis, so berührt derselbe die Seiten.

Lehrsatz. Jedem Quadrate lässt sich ein Kreis einschreiben.

Aufgaben. a) Einem gegebenen Quadrate einen Kreis einzuschreiben. b) Einem gegebenen Kreise ein Quadrat umzuschreiben.

3. In dem Rechtecke $ABCD$ (Fig. 62) und in dem Quadrate in Fig. 61 errichte EF senkrecht auf AB in der Mitte; dann sind A und B symmetrisch; da aber $\hat{A} = \hat{B}$, so sind auch AD und BC und weil $AD = BC$, auch die Punkte D und C symmetrisch. AC und BD sind demnach ebenfalls symmetrisch, folglich schneiden sie sich auf der Symmetrale, sind gleichlang und ihr Winkel wird halbiert. Ebenso ist GH Symmetrale.

Fig. 62.



Lehrsatz. Die Halbierungslinien der Diagonalwinkel eines Quadrats oder Rechtecks sind Symmetralen derselben.

Anmerkung. Das Quadrat hat vier, das Rechteck zwei Axen der Symmetrie.

4. Zeichne ein Viereck, in welchem die Diagonalen einander halbiren und gleichlang sind. Beweise mit Symmetrie 1. dass die Figur ein Rechteck oder Quadrat ist (dass die Winkel gleich sind); 2. dass, wenn die Diagonalen ausserdem auf einander senkrecht stehen, die Figur ein Quadrat sein muss (die Seiten gleich sind).

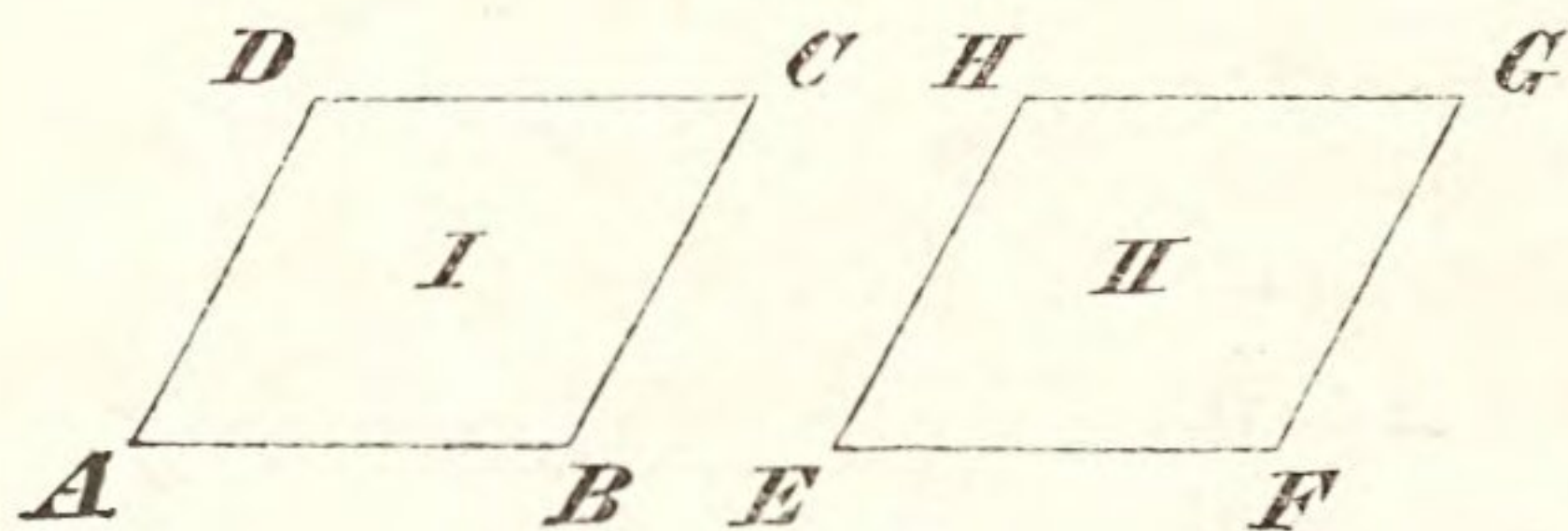
XI. Das Rhomboëder und der Rhombus.

§ 48.

Betrachtung und Anfertigung des Rhomboëders.

1. Denke dir einen Würfel in sich verschoben, so dass keine rechten Winkel mehr an ihm vorkommen; der entstandene Körper heisst Rhomboëder. (Der Lehrer zeige einen solchen Körper vor und deducire daran weiter. Zweckmässig ist auch ein Modell, um das Verschieben zu zeigen: Zwölf gleichlange Drahtstäbchen sind durch Oesen mit einander verbunden, so dass sie bei senkrechter gegenseitiger Lage einen Würfel bilden und leicht verschoben werden können.) Die Seitenflächen des Körpers sind Vierecke. Um die Beschaffenheit derselben kennen zu lernen, zeichnen wir eine auf die Tafel ab und versuchen, die anderen mit ihr zur Deckung zu bringen.

Fig. 63.



$ABCD$ und $EFGH$ (Fig. 63) stellen zwei Rhomboëderflächen vor. Wir versuchen die beiden Vierecke zur Deckung zu bringen, indem wir II viermal so auf I legen, dass die Seite EF der Reihe nach AB , BC , CD , DA deckt.

Wir finden, dass $\hat{E}$ nur die Winkel $\hat{A}$ und $\hat{C}$, dagegen die Seite EF sämtliche Seiten deckt.

Erklärung. Ein Viereck, in welchem alle Seiten gleich, die Winkel aber ungleich sind, heisst Rhombus.

Lehrsatz. Im Rhombus sind die gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

Erklärung. Ein von sechs congruenten Rhomben eingeschlossener Körper heisst Rhomboëder. Derselbe hat acht Ecken und zwölf gleichlange Kanten.

2. Verfahre wie in § 26, 1 und § 32, 1:

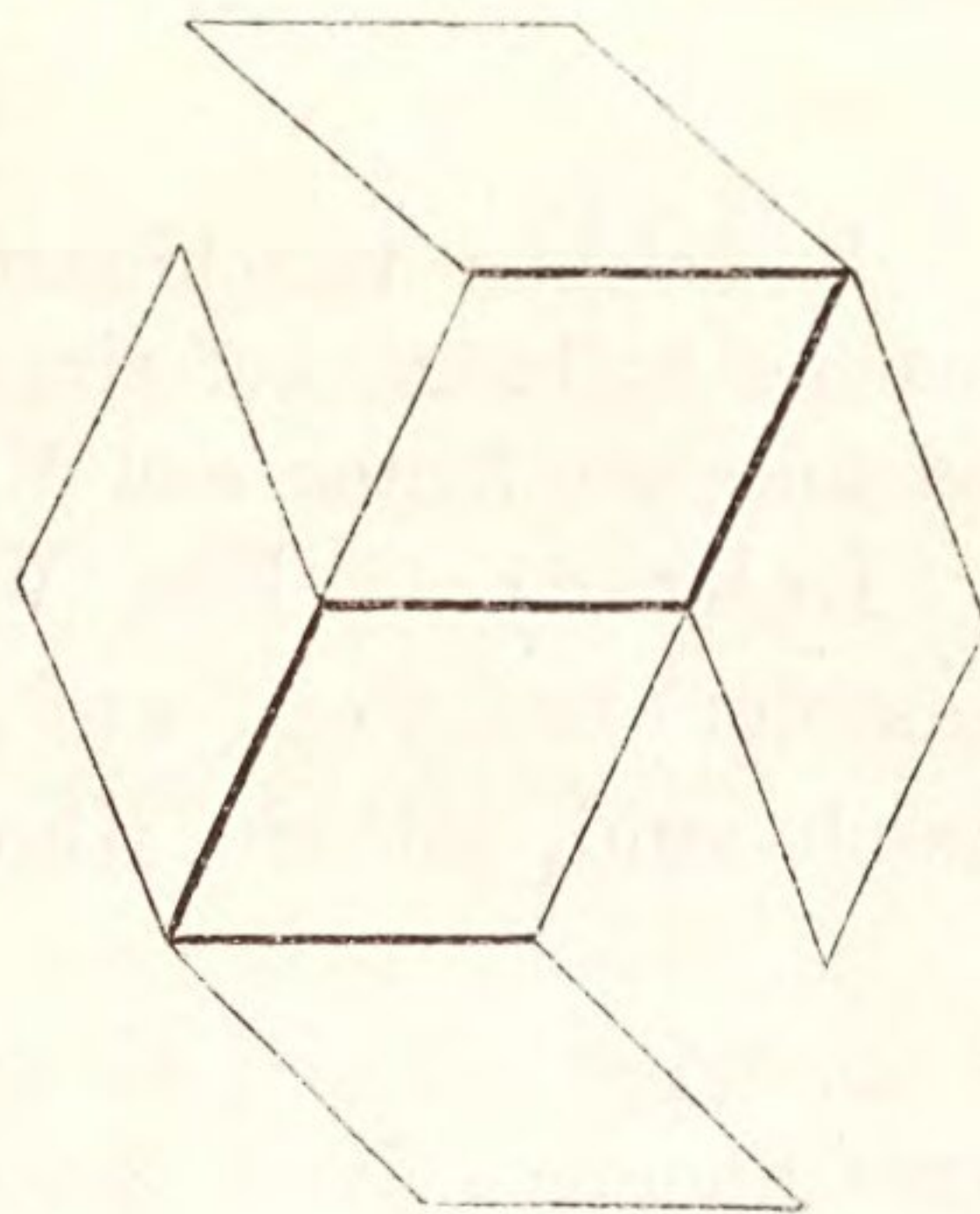
Lehrsatz. Die Winkelsumme in einem Rhombus ist gleich $4R (= 360^\circ)$.

3. Aufgabe. Zeichne einen Rhombus, dessen Seite gleich a) 0,03 m; b) 43 mm; c) 7,3 cm ist und miss die Winkel (siehe 1. Lehrsatz).

4. Ein Rhomboëder, dessen Kanten nur zusammengebunden sind, wird vorgezeigt (vergl. § 26, 3) und zum Netze ausgebreitet (Fig. 64).

Aufgabe. Zeichne das Netz eines Rhomboëders, dessen Kante gleich 1 dm und dessen spitzer Winkel $= 45^\circ$ ist, auf Pappe und setze den Körper zusammen.

Fig. 64.

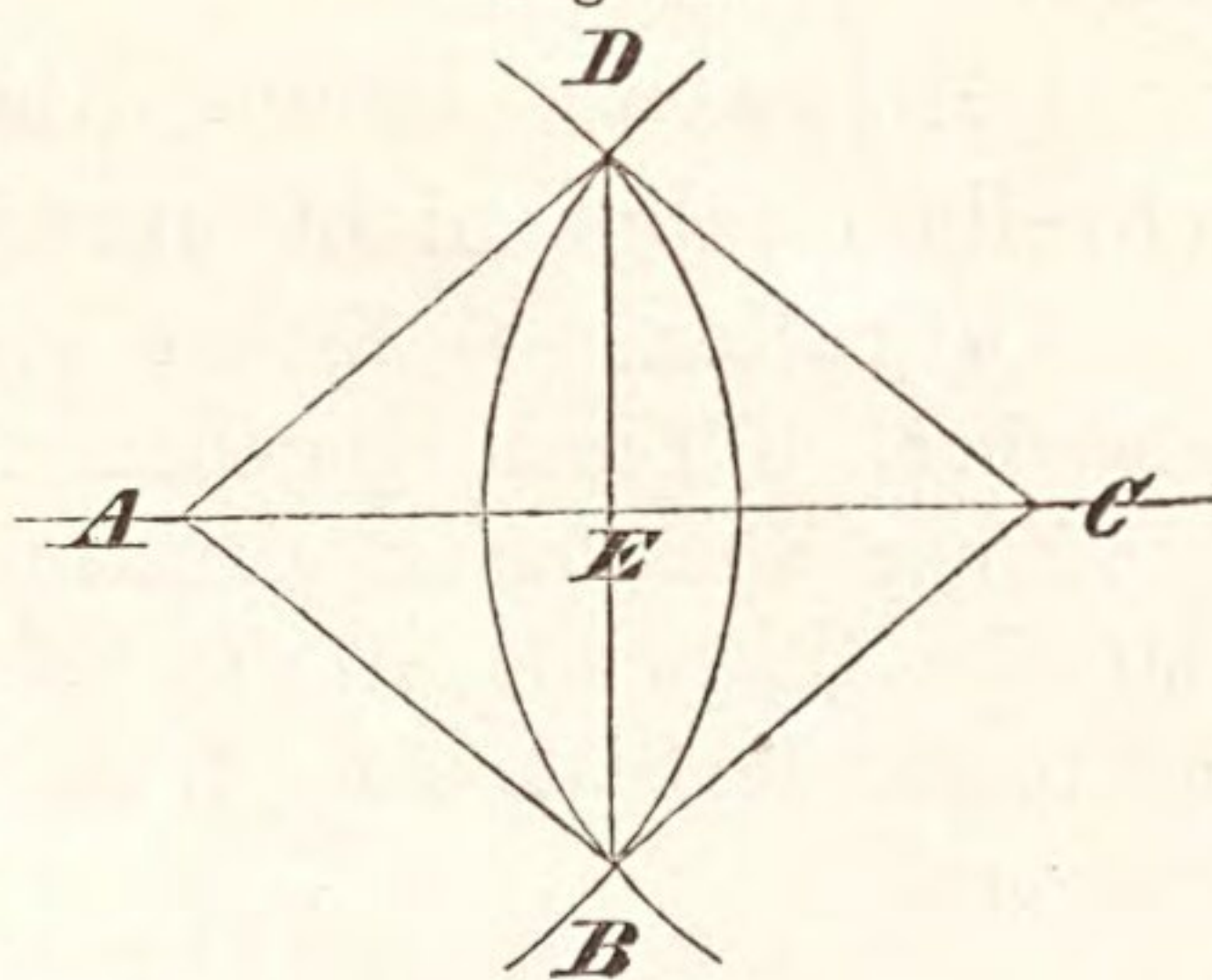


Weitere Eigenschaften des Rhombus.

§ 49.

1. Zeichne einen beliebigen Rhombus (Fig. 65), schlage mit AB einen Kreis um A und mit CB um C . Betrachte AC als Symmetrale! Welche Punkte sind symmetrisch? Wie folgt hieraus die Gleichheit der Winkel $\hat{D}$ und $\hat{B}$? Was lässt sich über BD aussagen? — Betrachte nun DB als Symmetrale und stelle die analogen Fragen!

Fig. 65.



Lehrsatz. Die Diagonalen eines Rhombus halbieren einander, stehen auf einander senkrecht und halbieren die Winkel. — Sie sind ungleich.

Zusatz. Jede Diagonale theilt einen Rhombus in zwei congruente gleichschenklige, beide Diagonalen in vier congruente rechtwinklige Dreiecke.

2. Bestätige die gefundenen Wahrheiten, besonders die letzte des Lehrsatzes, welche aus dem Augenschein abgeleitet wurde, durch Messen der Stücke eines beliebig gezeichneten Rhombus!

Zeichne einen Rhombus mit seinen Diagonalen. Bringe die entstandenen Dreiecke zur Deckung, entweder durch Ausschneiden oder durch Zusammenfalten!

3. Wie folgt der L. (= Lehrsatz) in 1 aus dem Satze über die Centrale?

§ 50.

1. Zeichne verschiedene Vierecke, in welchen die Diagonalen einander halbiren, auf einander senkrecht stehen, aber ungleich sind, und miss die Seiten und Winkel!

Lehrsatz. Ein Viereck, in welchem die Diagonalen einander halbiren, auf einander senkrecht stehen, aber ungleich sind, ist ein Rhombus.

2. Wie lässt sich die Gleichheit der Seiten in den nach 1 gezeichneten Rhomben durch Symmetrie erweisen?

3. Da die Seiten in Bezug auf die Diagonalen symmetrisch sind, so haben sie gleichen Abstand von deren Durchschnittspunkte. Beschreibe mit dem Abstände einen Kreis. Warum berührt derselbe die Seiten?

Lehrsatz. Jedem Rhombus lässt sich ein Kreis einschreiben (aber nicht umschreiben).

Aufgaben. a) Einem gegebenen Rhombus einen Kreis einzuschreiben! b) Einem gegebenen Kreise einen Rhombus umzuschreiben!

Einen Rhombus zu construiren, wenn gegeben sind: c) eine Seite und eine Diagonale; d) die beiden Diagonalen; e) ein Winkel und die ihn theilende Diagonale; f) ein Winkel und die ihm gegenüberliegende Diagonale!

§ 51.

Uebungsstoff.

Zeichnen. Zeichne einen Rhombus, in welchem 1. der Umfang $u = 0,132m$ dreimal so gross als eine Diagonale; 2. die Höhe halb so

gross als die Seite $a = 0,06$ m; 3. die Höhe halb so gross als die Diagonale $d = 0,67$ m; 4. die Summe der Diagonalen $= 0,133$ m und die eine von ihnen $\frac{3}{4}$ der anderen; 5. ein Winkel 60° und die Höhe $h = 0,045$ m; 6. ein Winkel $= 80^\circ$ und die ihn theilende Diagonale $= 0,075$ m; 7. ein Winkel $= 125^\circ$ und die gegenüberliegende Diagonale $= 0,070$ m ist!

8. Schreibe dem Rhombus mit den Diagonalen $d = 0,05$ m und $d' = 0,065$ m einen Kreis ein!

9. Zeichne mehrere Rhomben, welche a) eine Seite; b) eine Höhe; c) eine Diagonale; d) einen Winkel gemeinschaftlich haben!

§ 52.

1. Welche Eigenschaften haben Rhombus und Quadrat gemeinschaftlich?

2. Zeichne ein gleichseitiges Viereck $ABCD$ (Rhombus oder Quadrat, Fig. 66); dann ist a) $\angle C$ beliebig und wird durch CA halbt; b) $CA \perp DB$ und zwar in der Mitte, sie ist also Mittelsenkrechte. Daher sind leicht zu lösen folgende

Fig. 66.

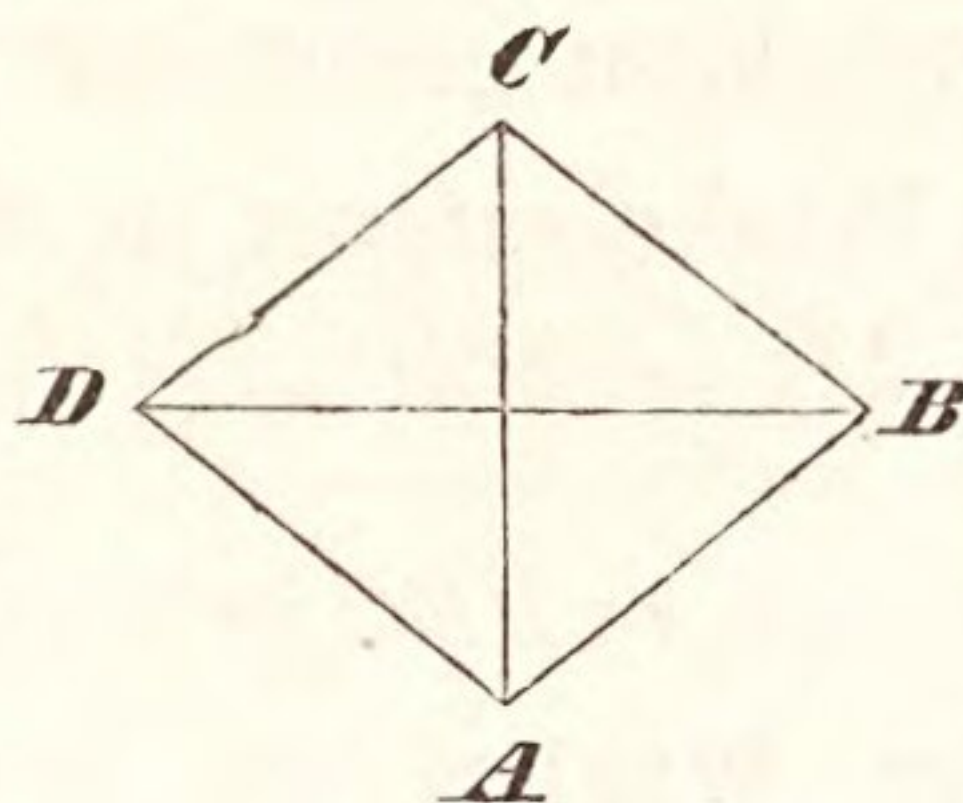
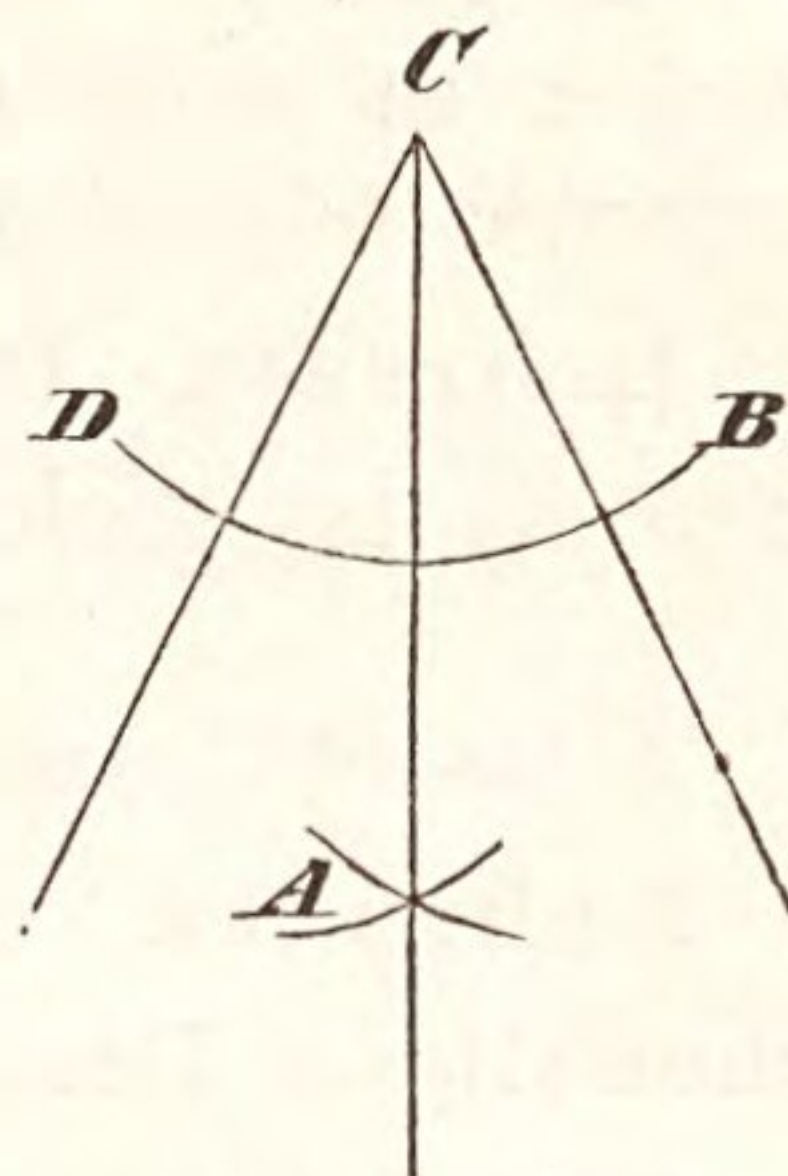


Fig. 67.



Aufgaben. a) Einen gegebenen Winkel zu halbiren (Fig. 67).

b) Auf einer gegebenen Strecke die Mittelsenkrechte zu errichten (Fig. 68).

(Eine gegebene Strecke zu halbiren.)

c) Von einem gegebenen Punkte aus auf eine gegebene Gerade das Loth zu fallen (Fig. 69).

Fig. 68.

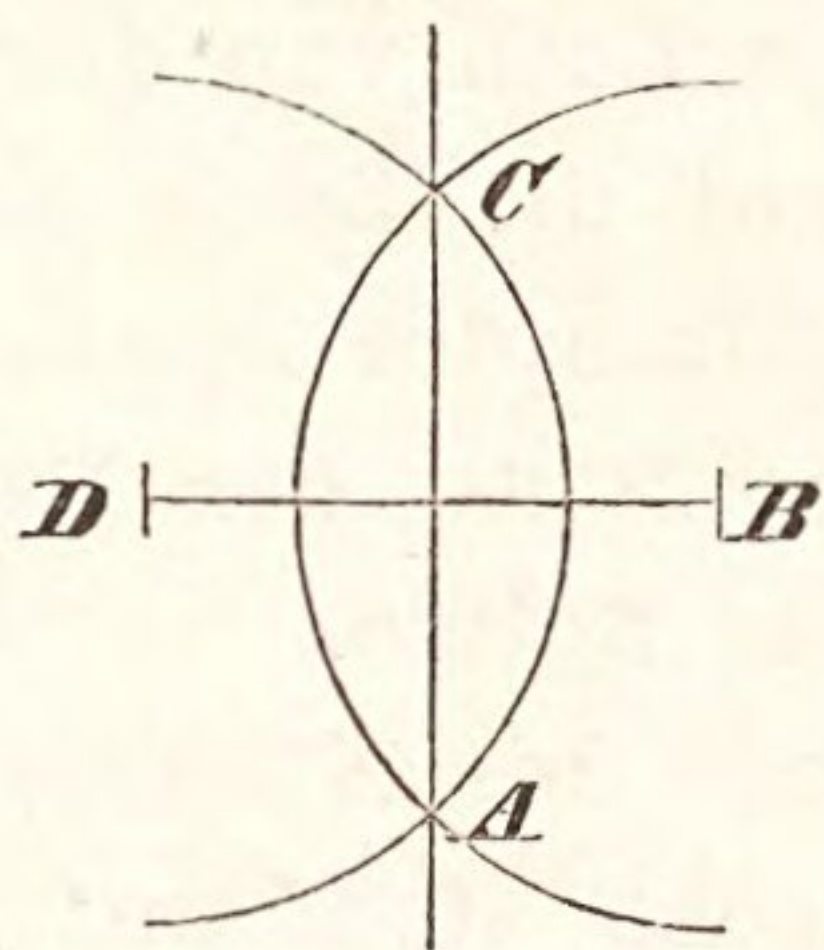
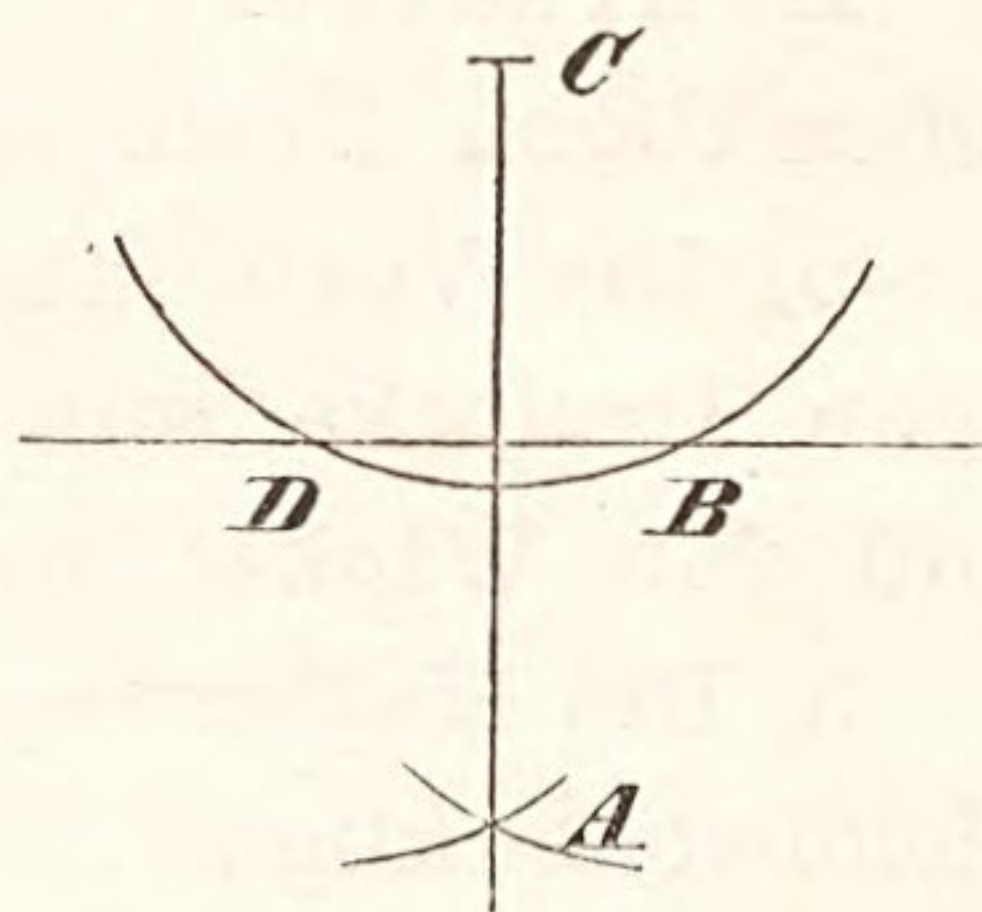


Fig. 69.

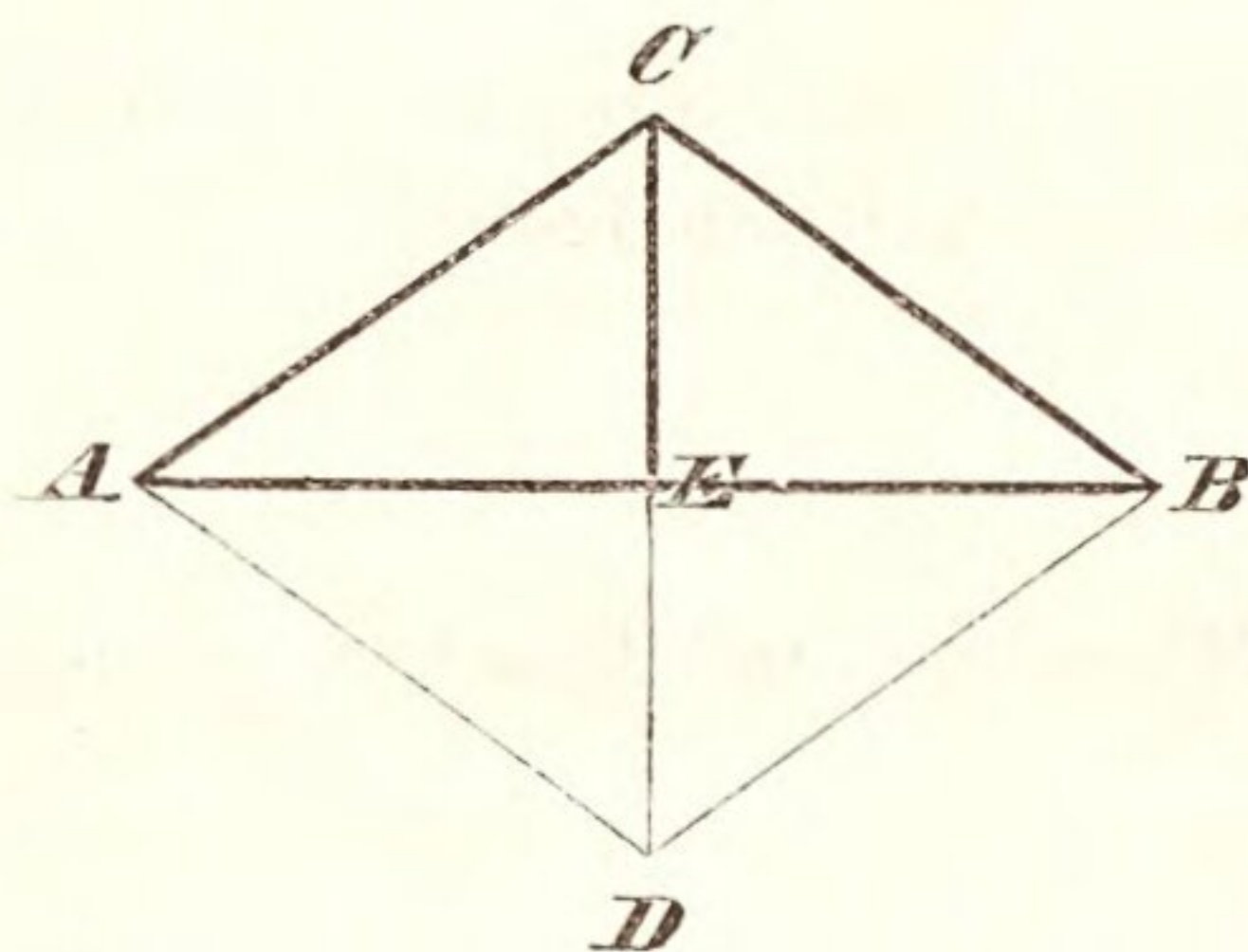


Anmerkung. Unterschied zwischen mechanischer und geometrischer Construction.

XII. Das gleichschenklige Dreieck.

§ 53.

Fig. 70.



1. Jede Diagonale theilt ein gleichseitiges Viereck in zwei congruente gleichschenklige Dreiecke. Jedes gleichschenklige Dreieck lässt sich zu einem gleichseitigen Viereck vervollständigen. Die gleichen Seiten heissen Schenkel, die dritte Seite heisst Grundlinie oder Basis (Fig. 70).

Aufgaben. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben ist a) die Grundlinie; b) ein Schenkel. Wegen der aus der Congruenz folgenden Gleichheit der Winkel (Fig. 70):

Lehrsatz. Die Winkelsumme in einem gleichschenkligen Dreiecke ist gleich $2R$ ($= 360^\circ$).

2. Da AEC symmetrisch zu BEC in Bezug auf CE ist, so ist $\hat{A} = \hat{B}$.

Lehrsatz. Die Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks sind einander gleich.

Prüfe die gefundene Wahrheit durch Decken.

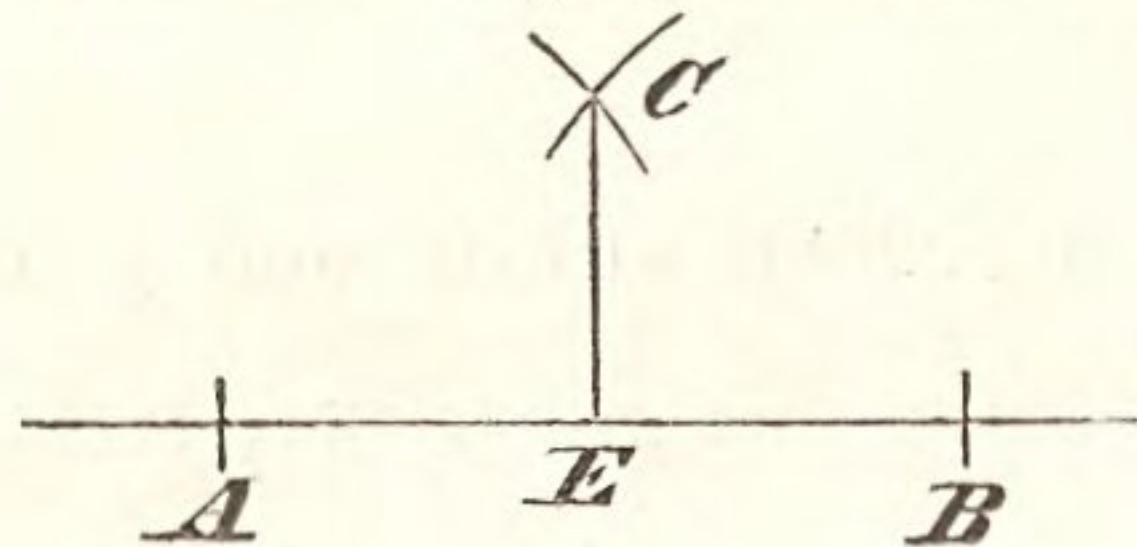
3. Aus der Symmetrie folgt ferner:

Lehrsätze. a) Das Loth von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Basis halbt dieselbe.

b) Die Verbindungslinie der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Basis halbt dieselbe und den Winkel an der Spitze.

c) Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks steht auf der Basis senkrecht und halbt dieselbe.

Fig. 71.



Aufgabe (aus b). Auf einer Geraden in einem ihrer Punkte die Senkrechte zu errichten (Fig. 71).

4. Erklärung. Die Verbindungslinie einer Ecke eines Dreiecks mit der Mitte der Gegenseite heisst seitenhalbirende Transversale, die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels heisst winkelhalbirende Transversale, die Senkrechte auf einer Dreiecksseite in ihrer Mitte heisst Mittelsenkrechte.

Die Lehrsätze in 3 lassen sich jetzt folgendermassen zusammenfassen:

Lehrsatz. In einem gleichschenkligen Dreiecke fallen die Höhe, die seiten- und winkelhalbirende Transversale aus der Spitze in eine Gerade zusammen.

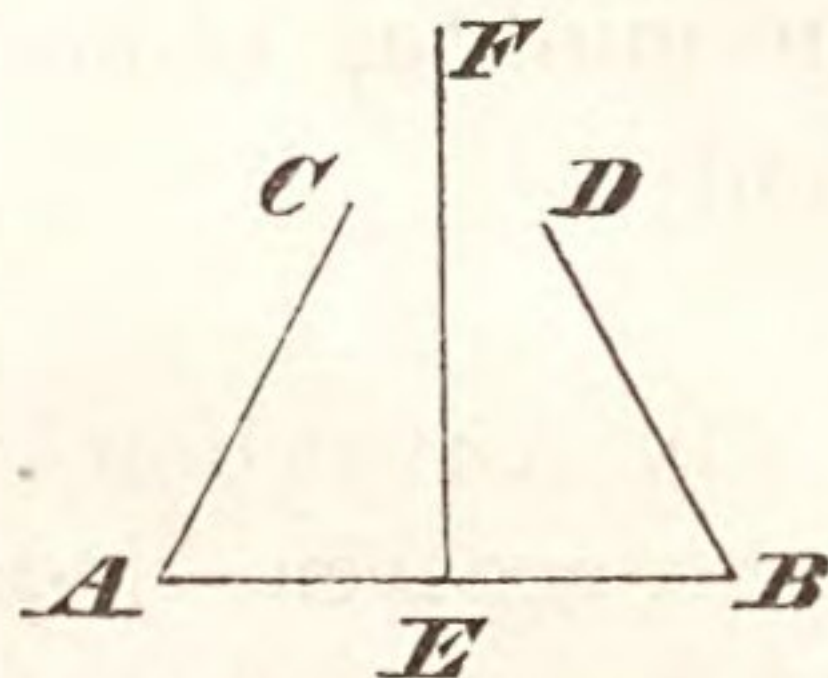
Aufgaben. a) Prüfe die gefundenen Wahrheiten durch Zeichnen beliebiger gleichschenkliger Dreiecke und Nachmessen.

b) Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck mit der seitenhalbirenden Transversalen aus der Spitze und ein ihm congruentes und weise dann durch Deckung (vorheriges Umdrehen des zweiten) die unter 3 genannten Lehrsätze nach.

c) Wie folgt daraus, dass die Höhe das gleichschenklige Dreieck in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke theilt, der Lehrsatz unter 1?

5. Zeichne eine Strecke AB beliebig (Fig. 72) und AC so, dass $\angle CAB$ spitz ist, trage $\angle CAB$ an AB in B an; errichte dann auf AB die Mittelsenkrechte EF und betrachte sie als Symmetrale. Dann sind die Punkte A und B , ferner die Halbstrahlen AC und BD symmetrisch; letztere schneiden sich also auf EF .

Fig. 72.



Lehrsatz. Die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks liegt auf der Mittelsenkrechten der Basis.

6. Da jeder Punkt der Symmetralen von zwei symmetrischen Punkten gleichweit entfernt ist, so folgt aus 5:

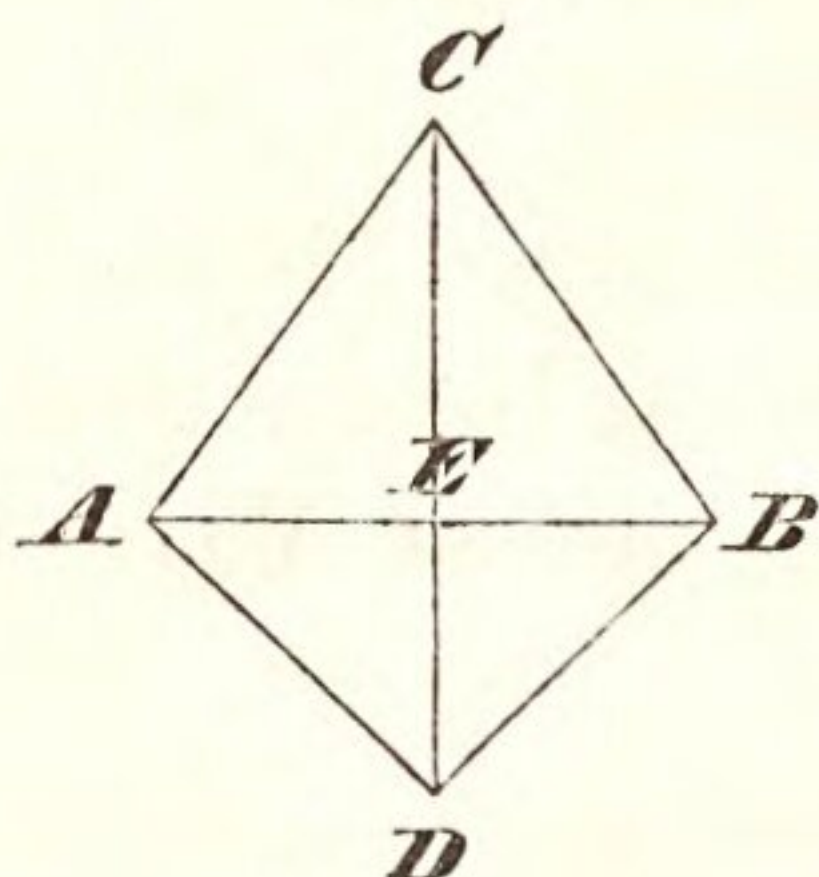
Lehrsatz. Gleiche Winkel eines Dreiecks haben gleiche Gegenseiten.

Aufgabe. Prüfe die gefundenen Wahrheiten durch Messen.

§ 54.

1. Zeichne zwei gleichschenklige Dreiecke über derselben Basis mit verschiedenen Schenkeln (Fig. 73), verbinde C mit D und be-

Fig. 73.



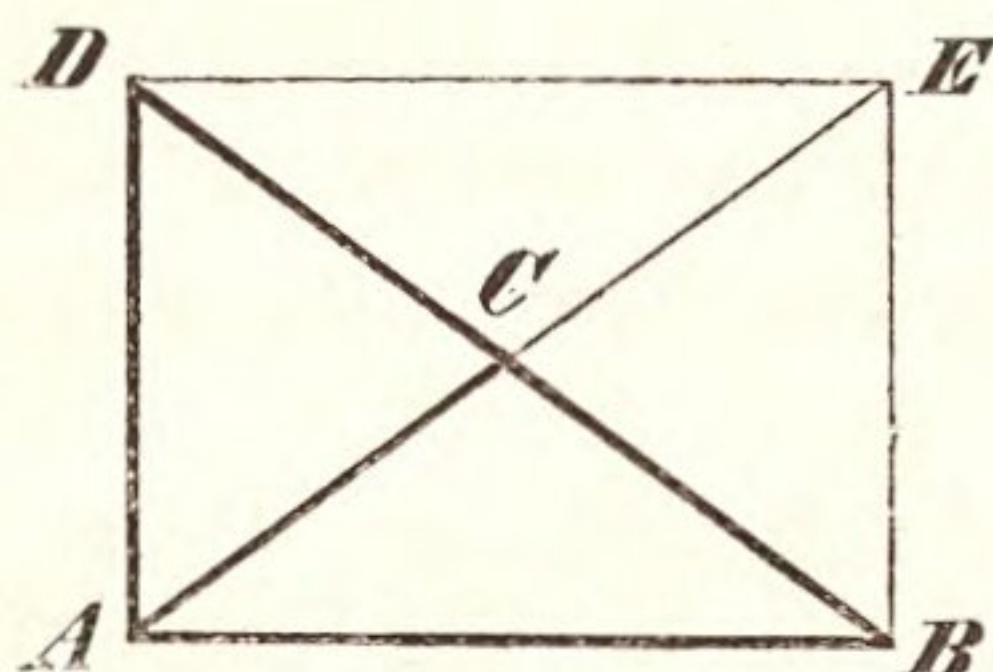
trachte diese Strecke als Symmetrale. Dann ist CAD symmetrisch zu CBD (warum?), folglich $CD \perp AB$; $AE = EB$.

Lehrsatz. Verbindet man die Spitzen zweier gleichschenkligen Dreiecke mit gemeinschaftlicher Basis mit einander, so steht diese Verbindungslinie auf der Basis senkrecht und halbiert dieselbe.

Fragen. a) Wie unterscheidet sich dieser Satz von dem über die Centrale zweier sich schneidenden Kreise?

b) Wie lässt sich die Construction der im § 52, 2 angeführten Aufgaben hiernach verallgemeinern?

Fig. 74.



2. Zeichne ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck ABC , verlängere BC über C hinaus um sich selbst. Verbinde D mit A und miss den $\angle DAB$.

Um die Wahrheit allgemein zu erweisen, verlängere AC ebenfalls um sich selbst bis E . Dann ist $ABED$ ein Rechteck nach § 34, 1.

Aufgabe. Auf einer gegebenen Strecke in einem ihrer Endpunkte, ohne sie zu verlängern, die Senkrechte zu errichten.

3. Aufgaben. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind: a) Grundlinie und Schenkel; b) Grundlinie und Basiswinkel; c) Grundlinie und Winkel an der Spitze; d) Schenkel und Basiswinkel; e) Schenkel und Winkel an der Spitze; f) Grundlinie und Höhe; g) Schenkel und Höhe; h) Höhe und Basiswinkel; i) Höhe und Winkel an der Spitze!

§ 55.

Uebungsstoff.

Rechnen. 1. Wie gross ist in einem gleichschenkligen Dreiecke der Umfang u , wenn sich die Grundlinie g zu einem Schenkel wie $m:n$ verhält; $g = 1,5 \text{ m}$, $0,343 \text{ m}$; $m = 5$, 49 ; $n = 6$, 27 ?

2. Wie gross sind die Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem Umfang u , wenn ein Schenkel a) doppelt so gross als die Basis; b) $\frac{2}{3}$ der Basis ist? $u = 3,5 \text{ m}$; $0,315 \text{ m}$?

3. Was für Winkel müssen die Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks sein?

4. Der Winkel an der Spitze sei c ; wie gross sind die übrigen Winkel? $c = 30^\circ$; R , $110^\circ 30'$; $\frac{5}{3}R$; $50^\circ 50' 50''$.

5. Ein Winkel an der Basis sei a ; wie gross sind die beiden anderen? $\hat{a} = 75^\circ$; $\frac{1}{2}R$; $\frac{1}{3}R$; $20^\circ 20'$; $89^\circ 50' 20''$.

6. Wenn der Winkel an der Spitze a) um 3° ; 5° ; $\frac{1}{10}R$ wächst, oder b) um 7° ; 10° ; $\frac{1}{5}R$ abnimmt, wie ändern sich die anderen Winkel?

7. Wenn ein Winkel an der Basis a) um 3° ; 10° ; $\frac{1}{8}R$ wächst, oder b) um 4° ; 9° ; $\frac{1}{3}R$ abnimmt, wie ändern sich die beiden anderen Winkel?

8. Wie gross sind die Winkel, wenn der Winkel an der Spitze a) 2, 3, 4 mal so gross; b) 2, 3, 4 mal so klein, als ein Winkel an der Grundlinie ist?

9. Wie gross sind die Winkel, wenn sich der Winkel an der Spitze zu einem Winkel an der Grundlinie wie a) 1:2; b) 4:3; c) 13:6 verhält?

Zeichnen. 10. Der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks sei 75° , zeichne einen Winkel an der Basis, ohne ihn vorher zu berechnen!

11. Ein Winkel an der Grundlinie sei $= \frac{1}{3}R$, zeichne den Winkel an der Spitze!

Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, 12. dessen Umfang $= 0,096$ m und 6 mal so gross als die Grundlinie ist; 13. in welchem die Grundlinie $= 0,046$ m und ein anliegender Winkel der dritte Theil des Winkels an der Spitze ist; 14. mit einem Schenkel von $0,05$ m, in welchem sich der Winkel an der Spitze zu einem Winkel an der Grundlinie wie 2:3 verhält; 15. mit der Höhe von $0,028$ m und 3 mal so gross als die Grundlinie; 16. mit der Höhe von $0,018$ m und einem doppelt so grossen Schenkel; 17. mit der Höhe von $0,065$ m und in welchem der Winkel an der Spitze $\frac{2}{5}$ des Winkels an der Grundlinie ist!

18. Zeichne mehrere gleichschenklige Dreiecke a) mit gemeinschaftlichem Winkel an der Spitze; b) mit gemeinschaftlichem Schenkel; c) mit gemeinschaftlichem Winkel an der Grundlinie!

19. Zeichne eine Strecke von $0,045$ m und halbire sie geometrisch!

20. Wie kann man eine Strecke oder einen Winkel geometrisch in 4, 8, 16, 32 gleiche Theile theilen?

21. Theile einen stumpfen Winkel in vier gleiche Theile!

22. Construire einen Winkel von a) 45° ; b) $22\frac{1}{2}^\circ$; c) $11\frac{1}{4}^\circ$!

23. Zeichne mit dem Halbmesser $r = 0,055$ m einen Bogen, dessen zugehörige Sehne $= 0,045$ m ist und halbire ihn dann geometrisch!

24. Zeichne mit dem Durchmesser $d = 0,045$ einen Kreis und theile die Peripherie geometrisch in acht gleiche Theile!

25. Zeichne eine Strecke $AB = 0,058$ m, theile sie in C im Verhältniss 1:3 und errichte dann auf derselben im Theilungspunkte C geometrisch die Senkrechte.

XIII. Das gleichseitige Dreieck. Tetraëder, Octaëder, Ikosaëder.

§ 56.

1. Zeichne über der Grundlinie $AB = a$) 0,064 m; b) 0,72 dm; c) 8,2 cm; d) beliebig ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel dieselbe Länge haben wie die Grundlinie, und miss die Winkel.

Erklärung. Ein Dreieck, dessen Seiten einander gleich sind, heisst gleichseitig.

Lehrsatz. Das gleichseitige Dreieck ist auch gleichwinklig. Jeder Winkel ist gleich $\frac{2}{3}R$ (60°).

Allgemein lässt sich dies leicht einsehen, da das Dreieck auf dreifache Art als gleichschenklige angesehen werden kann. Aus demselben Grunde folgen auch die folgenden Sätze unmittelbar:

Lehrsätze. a) Das gleichwinklige Dreieck ist auch gleichseitig.

b) Im gleichseitigen Dreiecke ist jede Höhe zugleich seiten- und winkelhalbirende Transversale und Mittelsenkrechte.

Fig. 75.

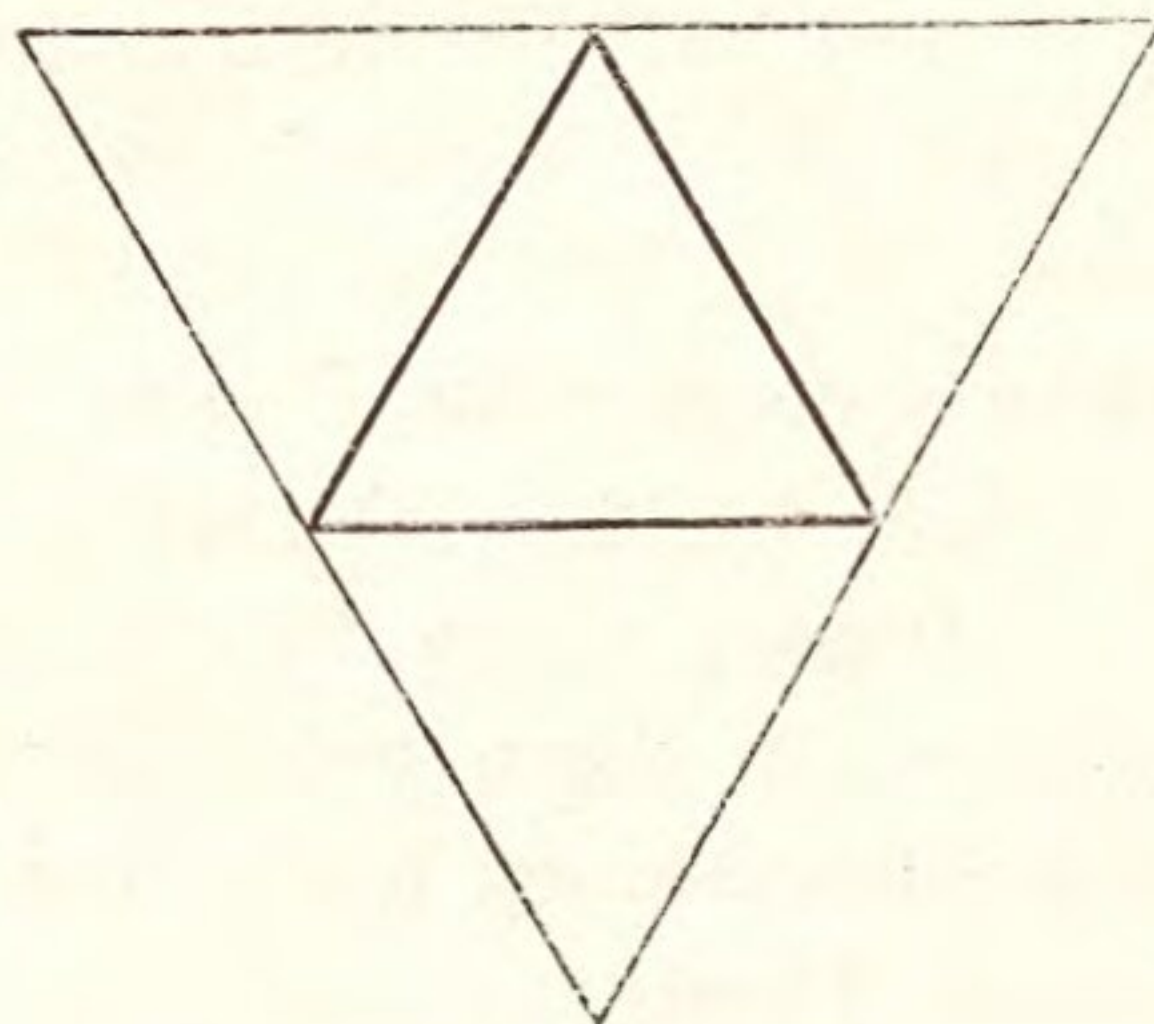
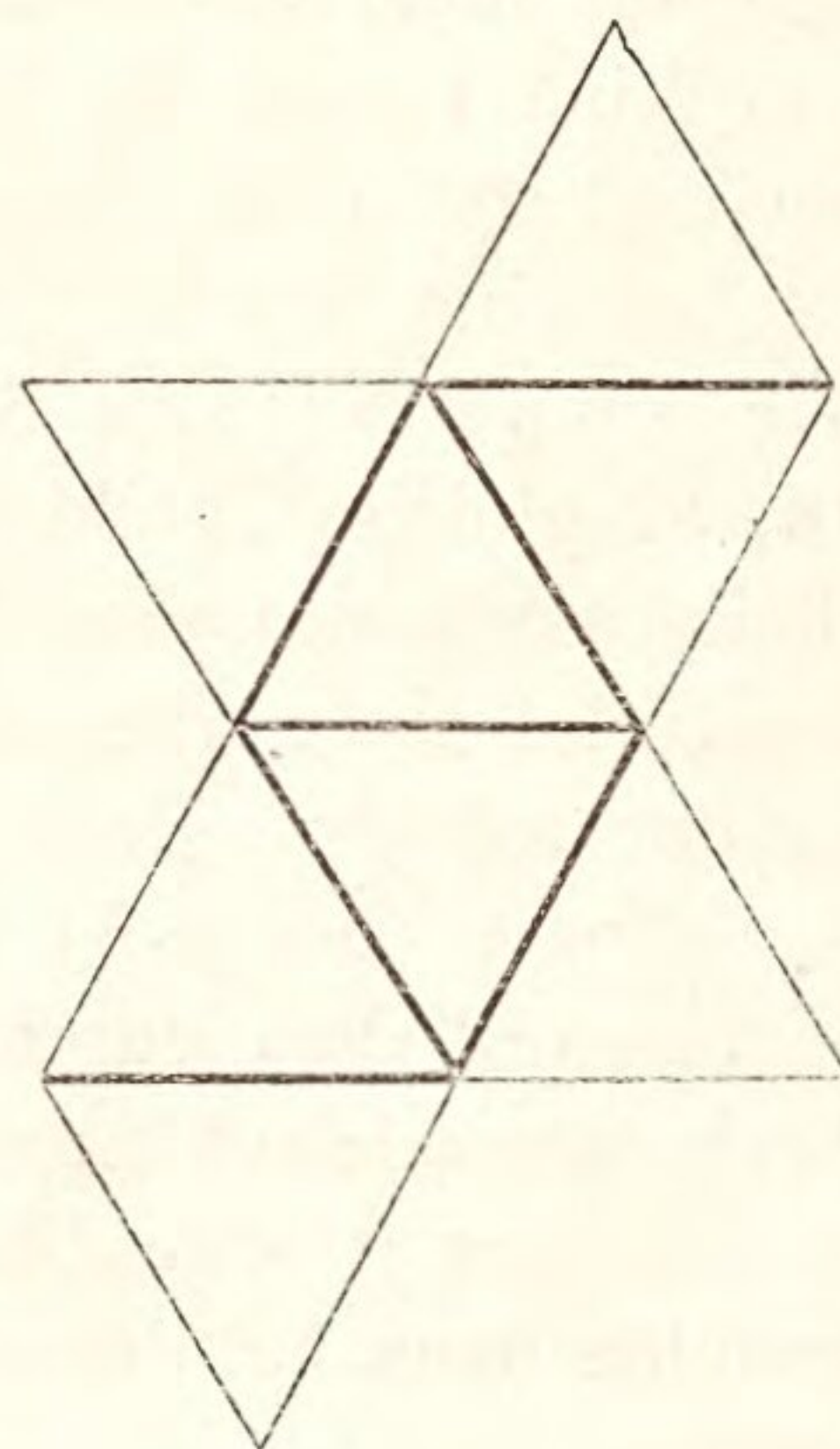
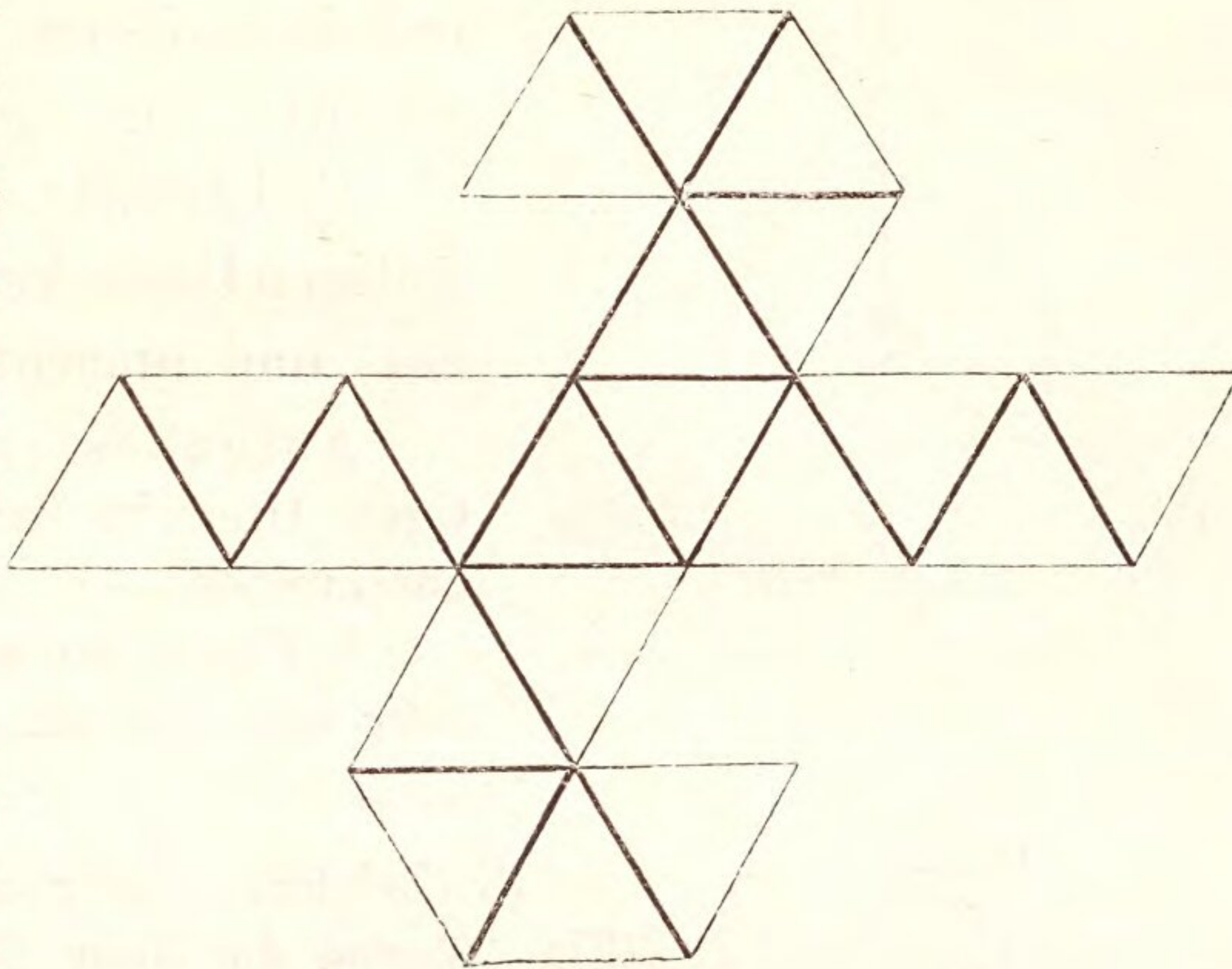


Fig. 76.



2. Zeichne vier congruente gleichseitige Dreiecke wie in Fig. 75, deren Seite = 8 cm ist, auf Pappdeckel, reisse die starkgezogenen Strecken ein und setze das Netz zu einem Körper zusammen.

Fig. 77.



Erklärung. Ein Körper, welcher von vier congruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, heisst Tetraëder. Das Tetraëder hat sechs gleichlange Kanten und vier Ecken.

3. Aufgabe. Zeichne, wie in Fig. 76, acht zusammenhängende gleichseitige Dreiecke (Seite = 7 cm), reisse die stark gezogenen Linien ein und setze das Netz zum Körper zusammen.

Erklärung. Ein Körper, welcher von acht congruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, heisst Octaëder. Das Octaëder hat acht gleichlange Kanten und sechs Ecken.

4. Aufgabe. Zeichne, wie in Fig. 77, zwanzig congruente gleichseitige Dreiecke, reisse die stark gezogenen Strecken ein und setze das Netz zu einem Körper zusammen.

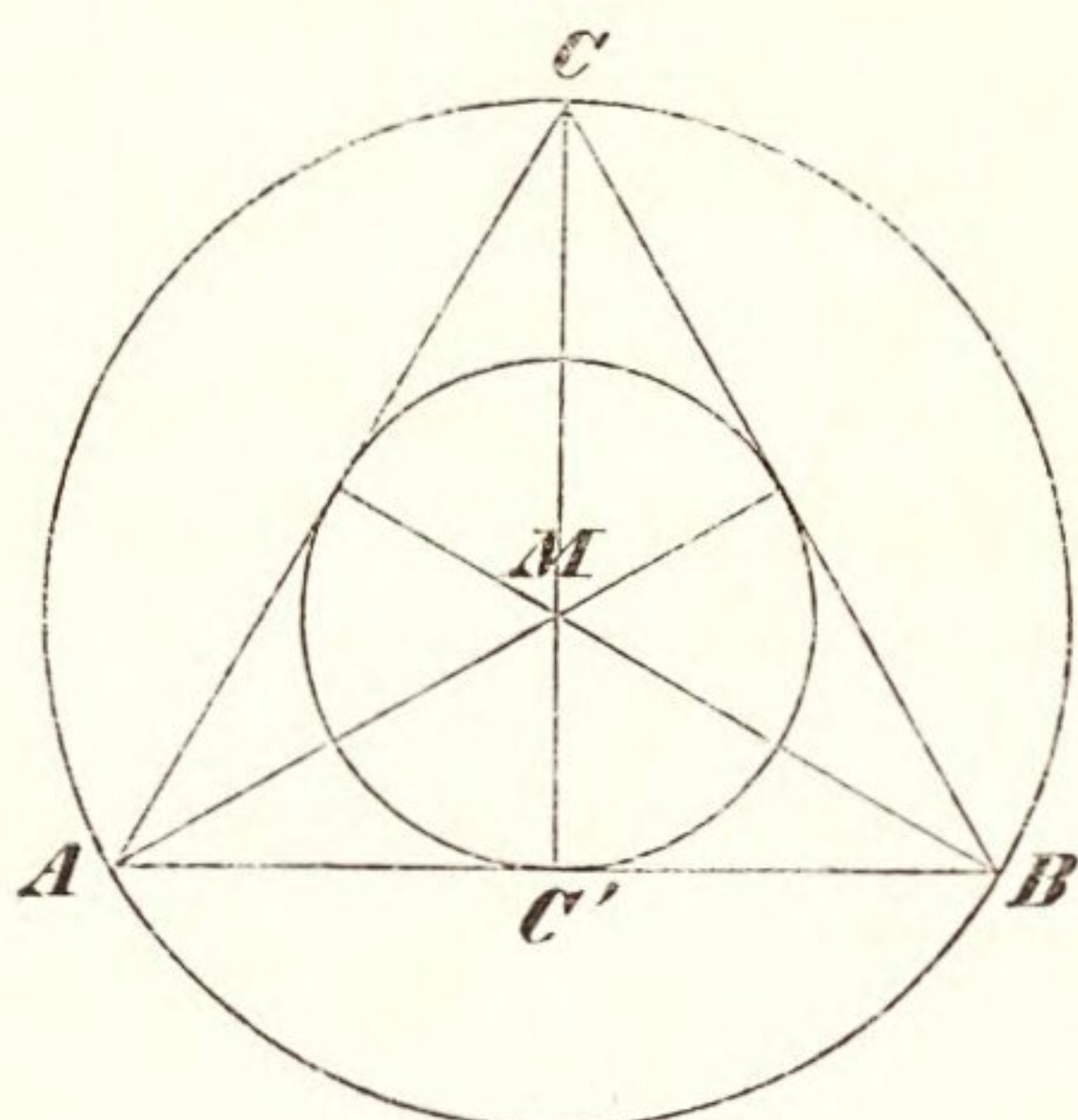
Erklärung. Ein Körper, welcher von zwanzig congruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, heisst Ikosaëder. Das Ikosaëder hat dreissig gleichlange Kanten und zwölf Ecken.

§ 57.

1. Jede Höhe des gleichseitigen Dreiecks ist Symmetrale desselben. Da nun (Fig. 78) B und A symmetrisch sind in Bezug auf CC' , aber auch $\angle C'BM = \angle C'AM$ (als Hälften gleicher Ganzen), so ist auch die Linie BM symmetrisch zu AM . Folglich schneiden sie sich auf CC' .

Lehrsatz. Die Höhen (seiten-, winkelhalbirenden Transversalen, Mittelsenkrechten) eines gleichseitigen Dreiecks

Fig. 78.



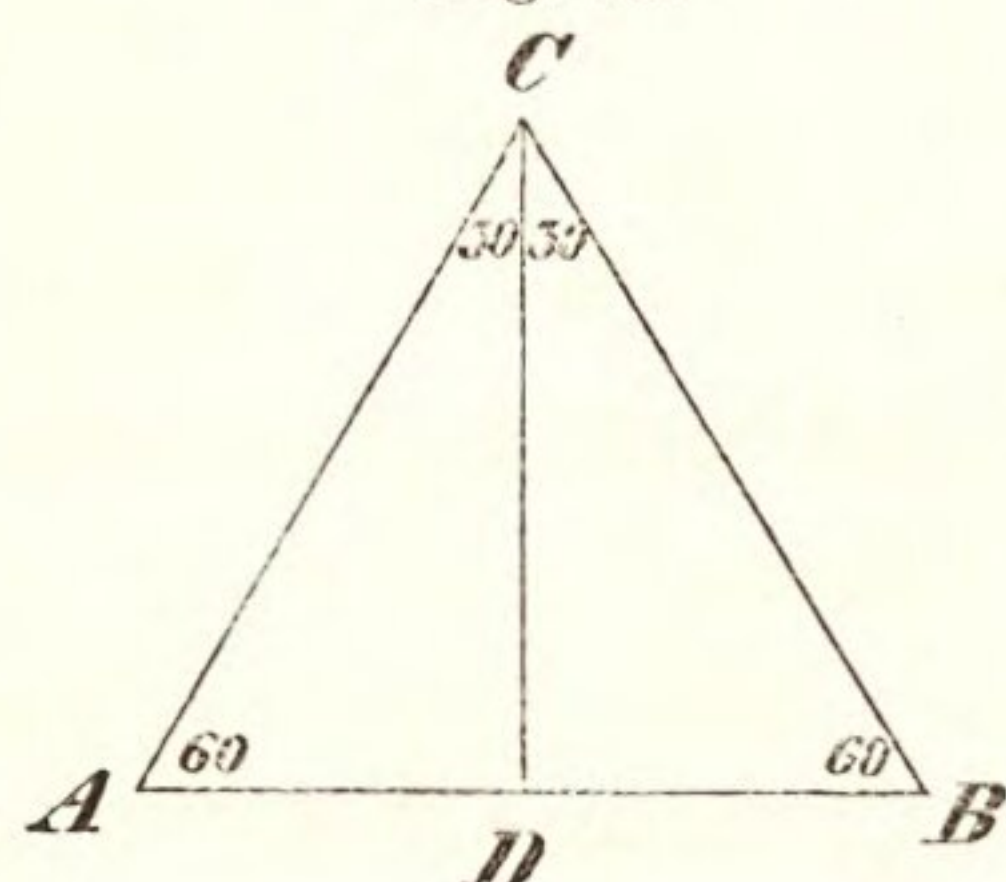
schneiden sich in einem Punkte und ihre oberen und unteren Abschnitte sind unter sich gleich.

Folgesatz. Jedem gleichseitigen Dreiecke lassen sich Kreise ein- und umschreiben.

Aufgaben. a) Einem gleichseitigen Dreiecke Kreise ein- und umzuschreiben.

b) Einem Kreise gleichseitige Dreiecke um- und einzuschreiben.

Fig. 79.



2. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck (Fig. 79) und die Höhe CD . Alsdann ist in dem rechtwinkligen Dreieck ADC $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 30^\circ$ und $AC = 2AD$.

Lehrsatz. Ist in einem rechtwinkligen Dreiecke ein Winkel doppelt so gross als der andere, so ist auch die Hypotenuse doppelt so gross als die dem kleineren Winkel gegenüberliegende Kathete (und umgekehrt).

Aufgaben. a) Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem ein Winkel $= 60^\circ$, der andere $= 30^\circ$ ist und miss die Hypotenuse und die kleinere Kathete.

b) Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Hypotenuse doppelt so gross ist als eine Kathete und miss die Winkel.

3. Die drei Höhen theilen das gleichseitige Dreieck in sechs congruente rechtwinklige Dreiecke von der eben erwähnten Beschaffenheit.

Lehrsatz. In jedem gleichseitigen Dreiecke ist der Radius des umgeschriebenen Kreises doppelt so gross als der Radius des eingeschriebenen Kreises; dieser ist $\frac{1}{3}$, jener $\frac{2}{3}$ der Höhe.

§ 58.

Uebungsstoff.

Rechnen. 1. Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks sei h ; wie gross sind r und R (Radien des ein- und umgeschriebenen Kreises)? $h = 0,48 \text{ m}$; $7,8 \text{ m}$.

2. Der Halbmesser des einem gleichseitigen Dreiecke eingeschriebenen Kreises ist r ; wie gross sind h und R ? $r = 0,25 \text{ m}$; $0,115 \text{ m}$; $1,29 \text{ m}$.

3. Der Halbmesser des einem gleichseitigen Dreiecke umgeschriebenen Kreises sei R ; wie gross sind h und r ? $R = 0,17 \text{ m}$; $0,36 \text{ m}$.

XIV. Die schiefe Rhomboidsäule und das Rhomboid.

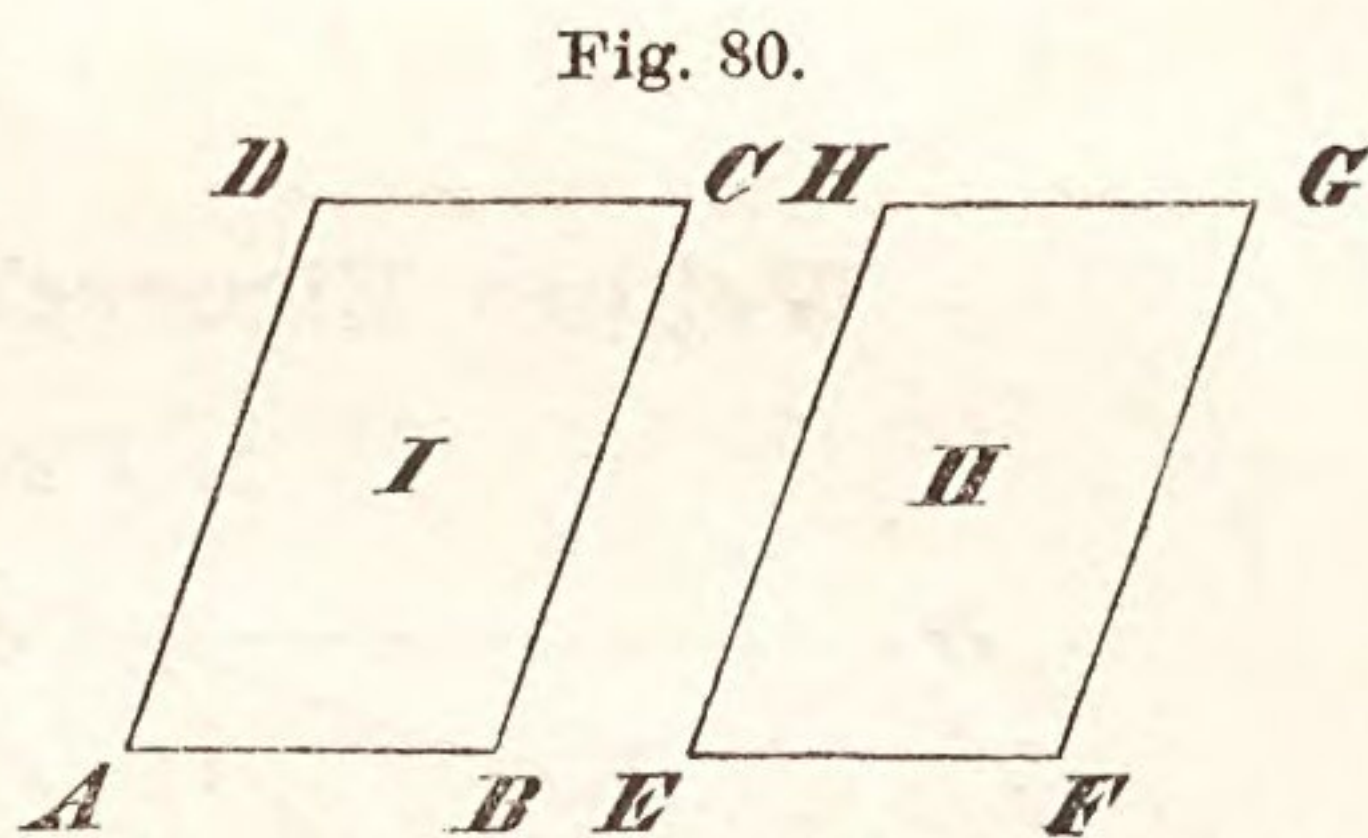
§ 59.

Entstehung der schiefen Rhomboidsäule.

1. Setzt man ein oder mehrere congruente Rhomboëder auf einander oder verlängert das Rhomboëder in einer Kantenrichtung, so entsteht eine schiefe Rhombsäule. Setzt man mehrere congruente Rhombsäulen an einander oder vergrössert man eine solche in der Richtung einer Grundkante, so aber, dass die drei Kanten ungleich werden, so entsteht eine schiefe Rhomboidsäule. (Der Lehrer zeigt die Säulen vor und lässt die letztere in der erwähnten Weise vor den Augen der Schüler entstehen.)

Von den Flächen lassen sich nur die gegenüberliegenden zur Deckung bringen.

I und II in Fig. 80 seien zwei solcher Vierecke. Man lege II viermal auf I , so dass Seite EF der Reihe nach in die Lage der Seiten AB , BC , CD , DA kommt. Dann decken sich die Seiten und Winkel nur in der ersten und dritten Lage.



Erklärung. Ein Viereck, in welchem nur die gegenüberliegenden Seiten und Winkel gleich sind, heisst Rhomboid.

Aufgabe. Ein Rhomboid zu construiren, wenn die eine Seite $a = 0,075 \text{ m}$, die andere $b = 68,5 \text{ mm}$ und der zwischenliegende Winkel $= 45^\circ, 73^\circ$ gegeben sind.

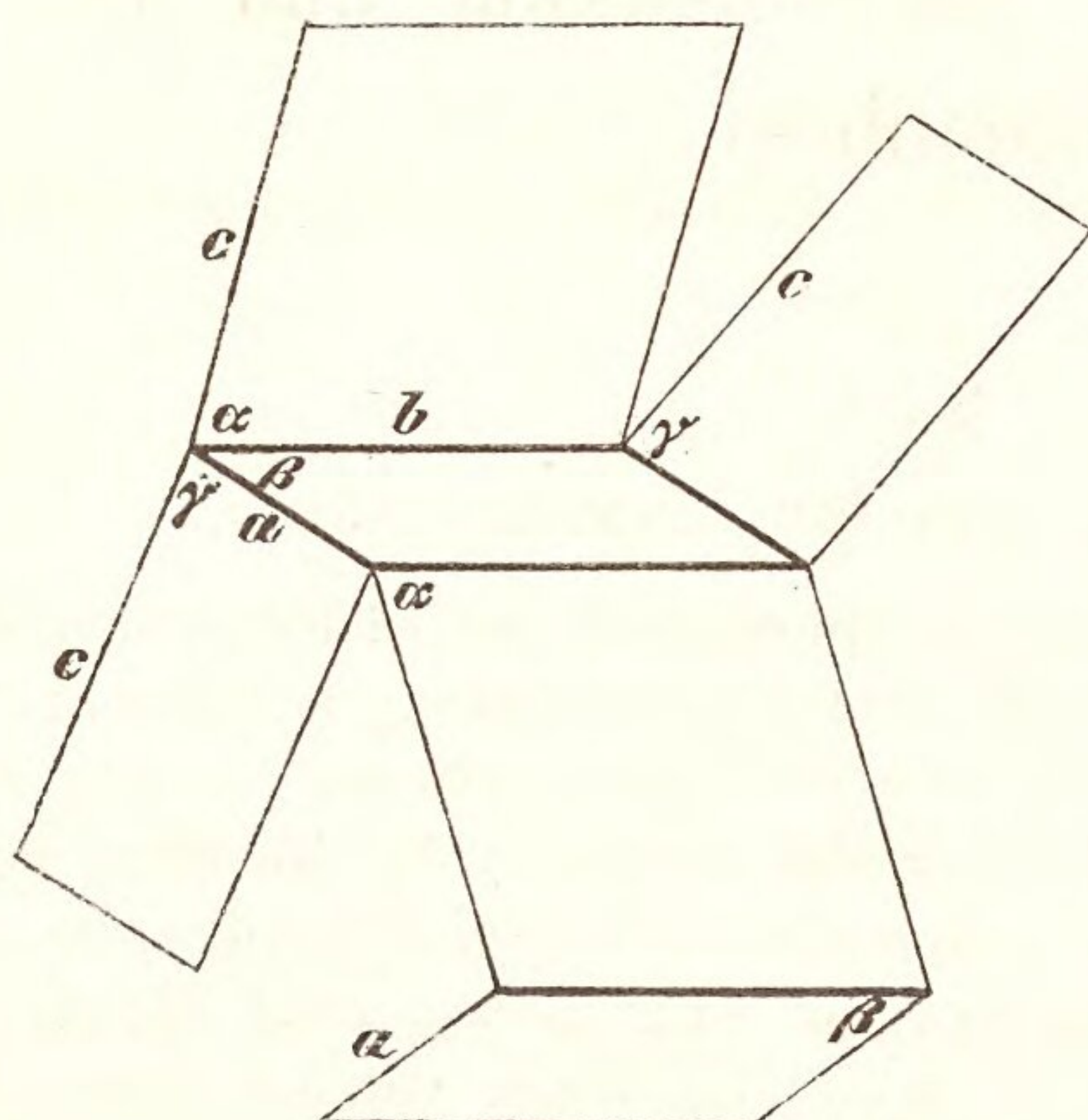
Erklärung. Ein Körper, welcher von sechs Rhomboiden eingeschlossen wird, heisst schiefe Rhomboidsäule; sie hat

acht Ecken und zwölf Kanten. Von letzteren sind die Seitenkanten unter sich gleich.

2. Verfahre wie in § 26, 1; § 32, 1; § 48, 2:

Lehrsatz. Die Winkelsumme eines Rhomboids ist gleich $4R$ ($= 360^\circ$).

Fig. 81.



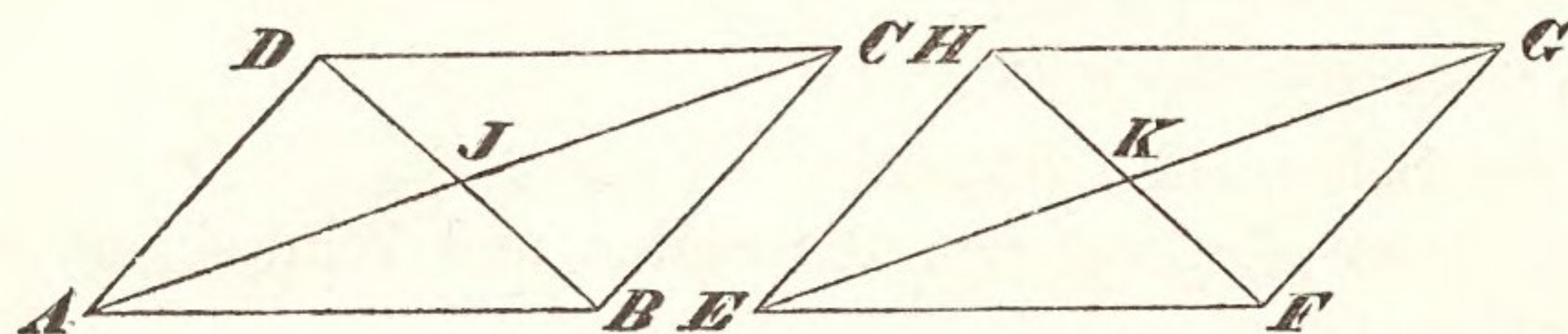
3. Netz der schiefen Rhomboidsäule (Fig. 81).

Aufgabe. Zeichne das Netz einer schiefen Rhomboidsäule mit den Kanten $a = 40$ cm, $b = 50$ cm, $c = 60$ cm, und den Winkeln $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 54^\circ$, $\gamma = 70^\circ$ auf Pappdeckel und setze daraus den Körper zusammen.

§ 60.

Weitere Eigenschaften des Rhomboids.

Fig. 82.



zweimal zur Deckung. Dann deckt EK das erste Mal AJ , das zweite Mal JC und ebenso FK resp. die Strecken BJ und DJ .

Lehrsatz. Die Diagonalen eines Rhomboids halbiren einander.

2. Miss die Winkel zwischen den Diagonalen und die Länge derselben.

Lehrsatz. Die Diagonalen eines Rhomboids stehen auf einander schief und sind ungleich.

3. Ziehe eine Diagonale, schneide sie durch und bringe die Dreiecke zur Deckung. Ist die Diagonale gleich einer Seite, so sind die Dreiecke gleichschenkelig; ist sie denselben ungleich, so sind die Dreiecke ungleichseitig.

Lehrsatz. Durch jede Diagonale wird das Rhomboid in zwei congruente gleichschenklige oder ungleichseitige Dreiecke getheilt.

4. Führe beide Diagonalschnitte und versuche die Dreiecke zur Deckung zu bringen. Es gelingt nur bei den gegenüberliegenden.

Lehrsatz. Beide Diagonalen theilen das Rhomboid in vier im Allgemeinen ungleichseitige Dreiecke, von denen je zwei gegenüberliegende congruent sind.

5. Miss die Entfernungen des Durchschnittspunktes der Diagonalen von den Ecken und Seiten.

Lehrsatz. Der Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Rhomboids ist weder von den Seiten noch von den Ecken gleichweit entfernt.

6. Aufgaben. Zeichne mehrere Rhomboide, welche a) die ungleichen Seiten; b) eine Seite und einen Winkel; c) eine Seite und eine Diagonale gemeinschaftlich oder gleich haben.

XV. Das ungleichseitige Dreieck.

§ 61.

1. Construire ein ungleichseitiges Dreieck, dessen Seiten $a = 0,04 \text{ m}$, $b = 50 \text{ mm}$, $c = 3 \text{ cm}$ sind. Das Dreieck lässt sich zu einem Rhomboid vervollständigen. Da die beiden Dreiecke congruent, die Winkel also einzeln gleich sind, so folgt:

Lehrsatz. Die Winkelsumme eines ungleichseitigen Dreiecks ist gleich $2R (= 180^\circ)$.

2. Miss die Winkel!

Lehrsatz. Das ungleichseitige Dreieck ist auch ungleichwinklig.

XVI. Dreieck, Viereck und Vieleck im Allgemeinen.

§ 62.

1. Giebt es ausser den durchgenommenen Dreiecken noch andere? Wie gross ist demnach die Winkelsumme in jedem Dreieck? Wie gross in jedem der bisher betrachteten Vierecke? Verfahre mit einem beliebigen Vierecke wie in § 26, 1; § 32, 1; § 48, 2; § 59, 2. Beträgt auch hier die Winkelsumme $4R$?

2. Erklärung. Die ebenen Figuren theilt man ein in geradlinige, krummlinige und gemischtlinige. Geradlinig heissen sie, wenn sie von lauter Strecken, krummlinig, wenn sie von krummen Linien (Curven), und gemischtlinig, wenn sie theils von Strecken, theils von Curven begrenzt sind.

Frage: Zu welcher Klasse von Figuren gehören die folgenden: a) Kreis; b) Dreieck; c) Viereck; d) Segment; e) Sector?

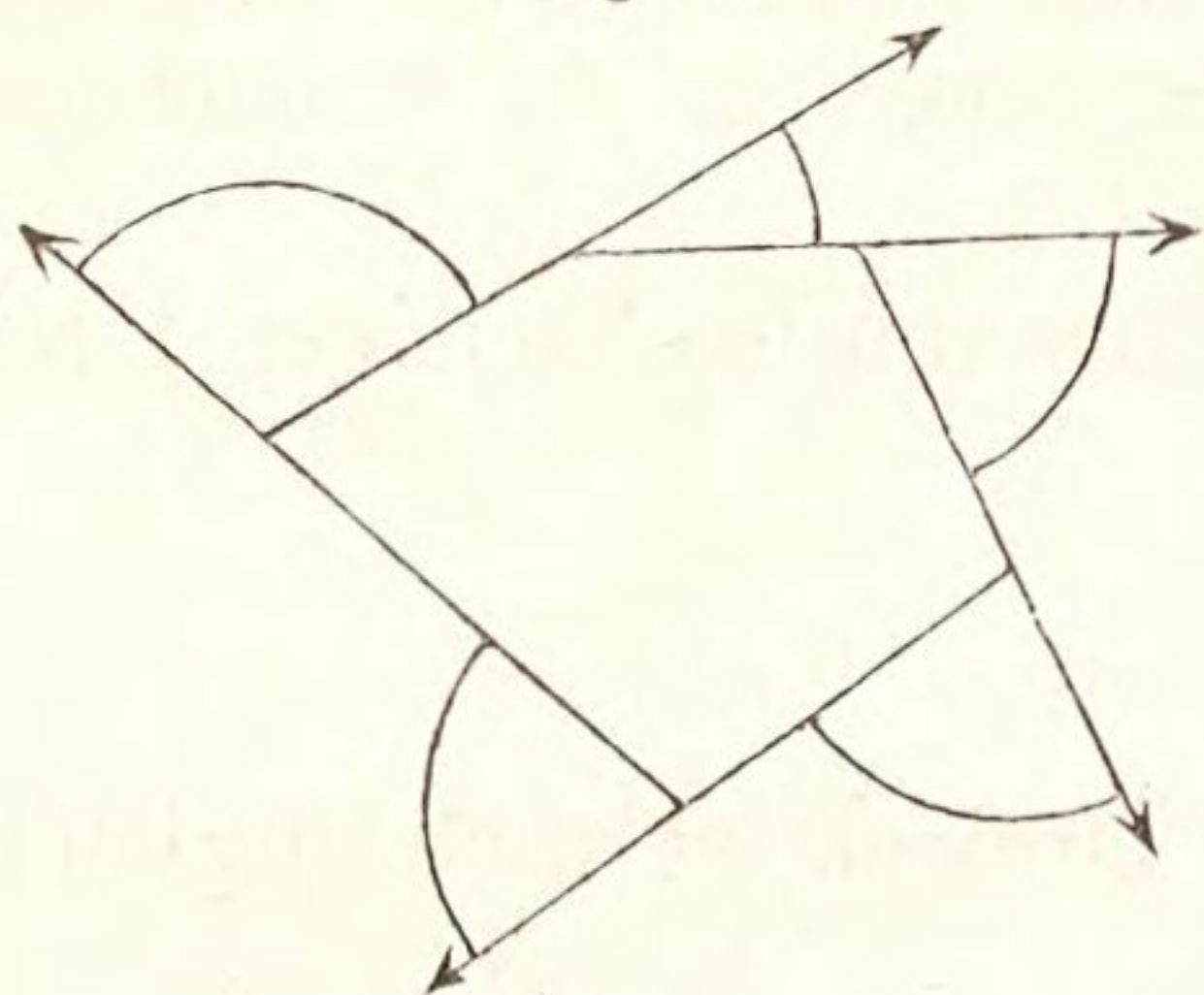
Erklärung. Die Strecken, welche geradlinige Figuren begrenzen, heissen Seiten; ihre Endpunkte Ecken. Nach der Zahl der Ecken oder Seiten werden die Figuren benannt (Dreiecke, Vierecke u. s. w., oder Dreiseite, Vierseite u. s. w.). Lässt man die Eckenzahl unbestimmt, so nennt man die Figur N -eck oder Vieleck oder Polygon.

3. Zeichne ein Vieleck, verlängere eine Seite über einen Eckpunkt hinaus!

Erklärung. Der Nebenwinkel eines inneren Vieleckswinkels heisst Aussenwinkel des Vielecks.

Frage. Wieviel Aussenwinkel giebt es an jeder Ecke? Vergleiche die an derselben Ecke liegenden mit einander!

Fig. 83.



4. Verlängere jede Seite eines Vielecks (Fig. 83) über eine Ecke hinaus so, dass die Richtungen sich ergeben, wenn man das Vieleck in demselben Sinne umschreitet. Denke dann die Operation des § 26, 1 auf das Vieleck angewandt (oder addire die mit demselben Radius beschriebenen Bogen graphisch).

Lehrsatz. Die Summe der Aussenwinkel eines Vielecks (an jeder Ecke einen gerechnet) ist gleich $4R (= 360^\circ)$.

Jeder Aussenwinkel beträgt mit dem anliegenden inneren Winkel $2R$, daher:

Lehrsatz. Die Winkelsumme eines Vielecks (mit lauter convexen Winkeln) ist gleich $n \cdot 2R - 4R$.

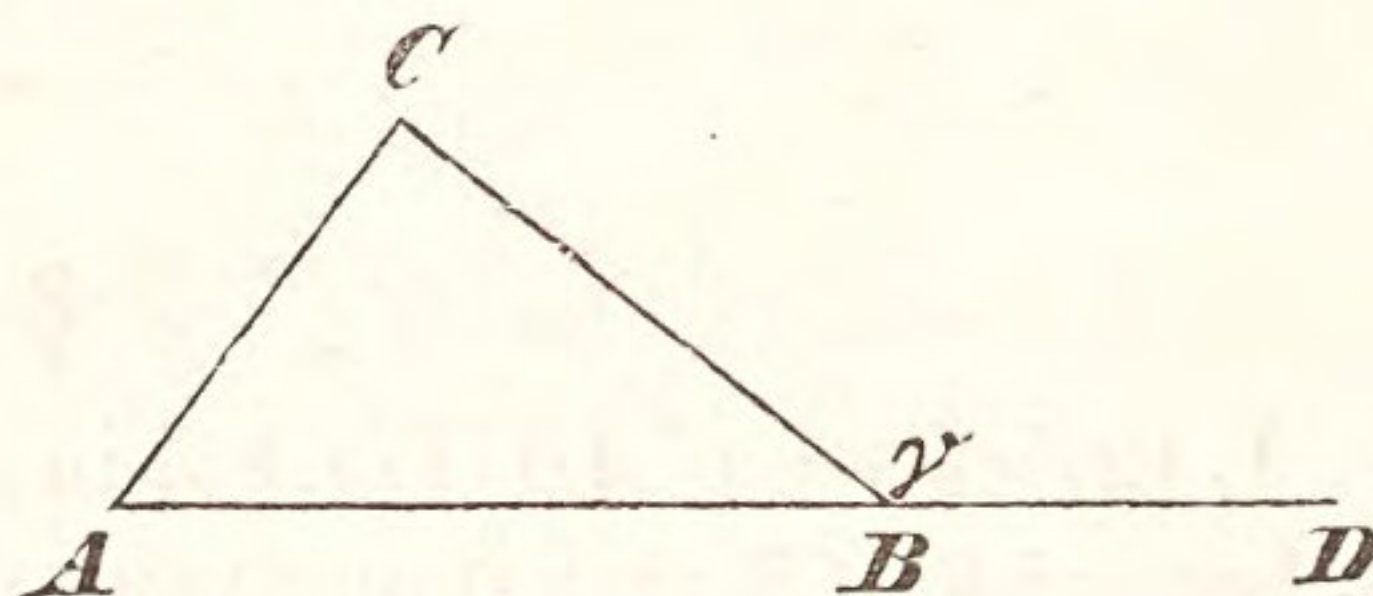
Folgerungen. a) Die Winkelsumme jedes Vierecks ist gleich $4R$.

b) Die Winkelsumme jedes Dreiecks ist gleich $2R$.

Anmerkung. Das Dreieck kann demnach nur einen rechten oder stumpfen Winkel enthalten. Eintheilung der Dreiecke a) nach den Winkeln in rechtwinklige, stumpfwinklige, spitzwinklige; b) nach den Seiten in gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige.

5. Der Aussenwinkel δ des Dreiecks ABC (Fig. 84) ist supplementär zu $\hat{B}$; aber auch die Winkelsumme $\hat{A} + \hat{C}$ ist supplementär zu demselben Winkel, daher:

Fig. 84.



Lehrsatz. Der Aussenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Dreieckswinkel (und folglich grösser als jeder von ihnen).

Folgerungen. 1. Der Aussenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so gross als jeder Basiswinkel.

2. Von einem Punkte ausserhalb einer Geraden giebt es nur eine Senkrechte zu derselben. (Beweis?)

§ 63.

Uebungsstoff.

Rechnen. 1. Wie gross ist die Winkelsumme in einem 7-, 11-, 15-, 20-, 25-eck?

2. Wie gross ist ein Winkel in den vorigen Vielecken, wenn dieselben gleichwinklig sind?

3. Ein Winkel eines Dreiecks sei $\hat{A}$; wie gross ist die Summe der beiden anderen? $\hat{A} = 40^\circ$; $\frac{1}{3}R$; 57° ; $1\frac{4}{9}R$; $133^\circ 36' 12''$.

4. Wenn zwei Winkel eines Dreiecks zwei Winkeln eines anderen gleich sind, was lässt sich dann von den dritten Winkeln behaupten?

5. In was für einem Dreieck ist ein Winkel gleich der Summe der beiden anderen?

Wie gross sind die Winkel eines Dreiecks, wenn 6. der Unterschied zweier Winkel gleich dem dritten; 7. ein Winkel halb so gross als der zweite und doppelt so gross als der dritte ist; 8. die Winkel sich verhalten wie die Zahlen 2, 3 und 5?

9. Der Aussenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks sei d , wie gross sind die inneren Winkel? $d = 150^\circ$; R ; $97^\circ 2'$; $\frac{2}{3}R$; $54^\circ 20' 40''$.

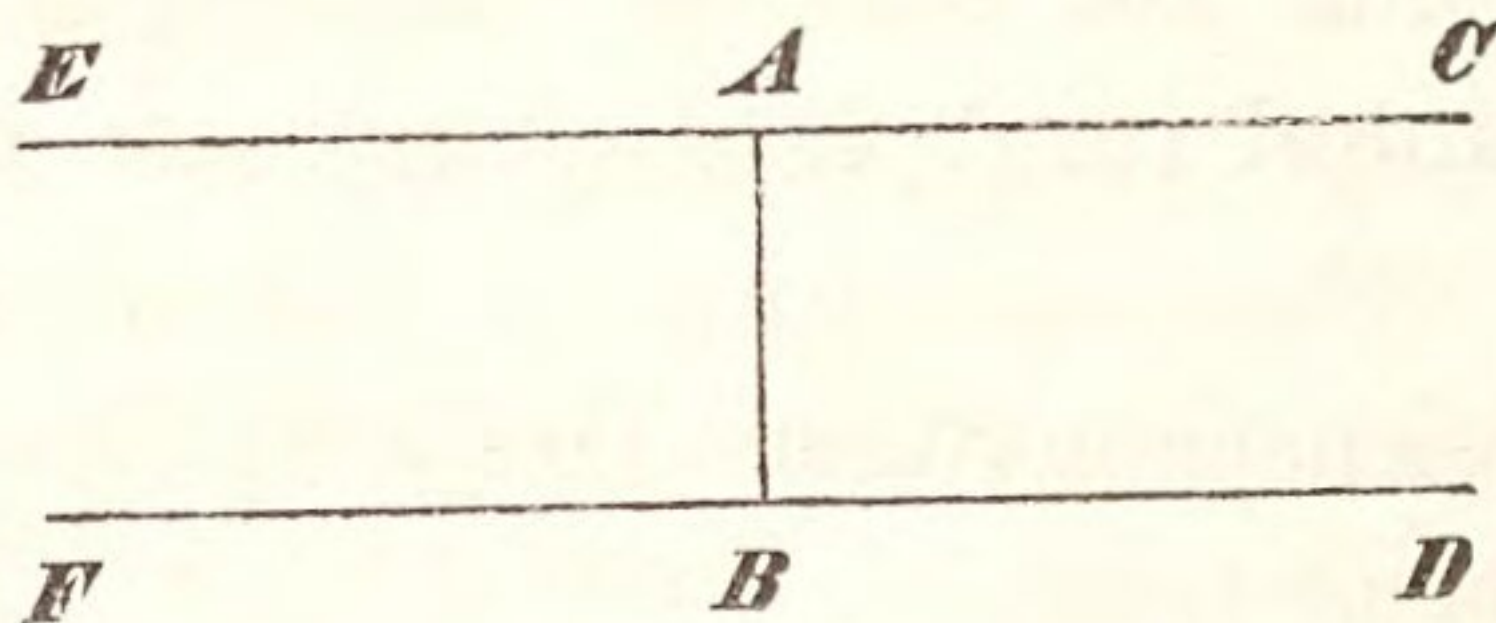
10. Der Aussenwinkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks sei δ ; wie gross sind die inneren Winkel? $\delta = 100^\circ$; $\frac{4}{3}R$; $125^\circ 30'$; $1,9R$; $130^\circ 5' 10''$.

XVII. Theorie der Parallelen.

§ 64.

1. Errichte auf AB (Fig. 85) in A und B die Senkrechten AC und BD und betrachte AB als Symmetrale; dann sind die Verlängerungen AE und BF beziehungsweise symmetrisch zu AC und BD . Wenn daher die Halbstrahlen AC und BD sich in einem Punkte trafen, so müssten auch AE und BF sich in einem dazu symmetrischen Punkte treffen. Die Geraden EC und FD können sich aber nicht in zwei Punkten schneiden.

Fig. 85.



Erklärung. Gerade Linien in derselben Ebene, welche nie zusammentreffen, heissen parallel ($\nparallel$ oder $//$). Gerade Linien in verschiedenen Ebenen, welche nie zusammentreffen, heissen sich kreuzend.

Lehrsatz. Gerade Linien, welche auf derselben dritten Geraden senkrecht stehen, sind parallel.

2. A (in Fig. 85) sei ein Punkt ausserhalb FD ; fälle von A das Loth AB auf FD und errichte auf AB in A die Senkrechte EC . Da EC das einzige Loth auf AB in A ist:

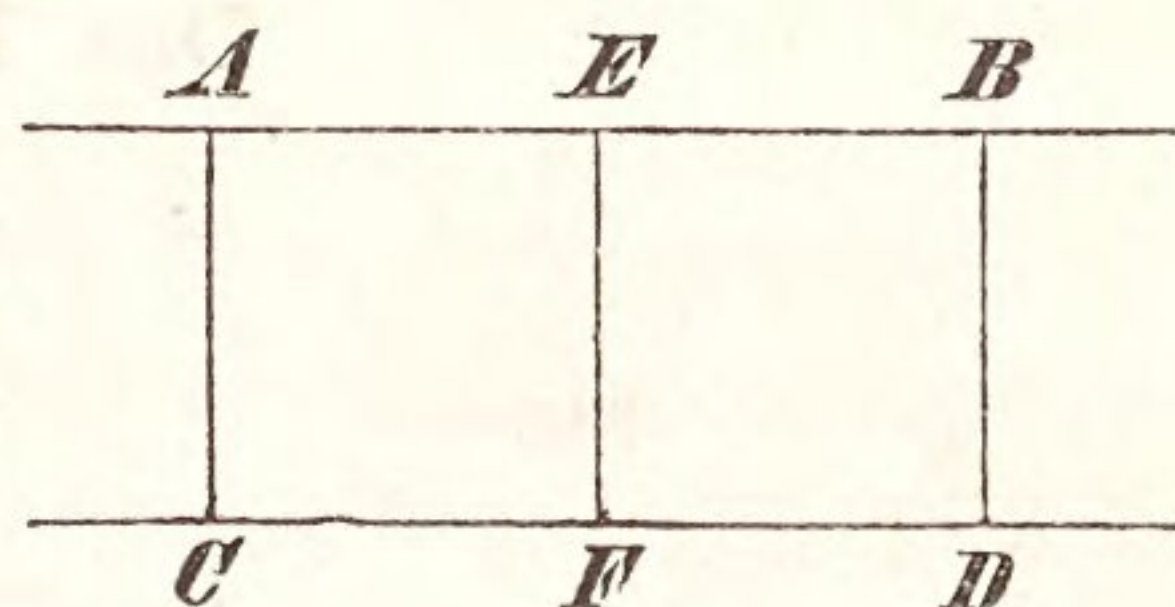
Lehrsatz. Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden giebt es nur eine Parallele zu derselben.

3. EC (Fig. 85) sei $\parallel FD$. Fälle von einem beliebigen Punkte A das Loth AB auf FD und betrachte AB als Symmetrale. Dann fällt beim Zusammenklappen BD auf BF , da aber $AC \parallel BD$ und $AE \parallel BF$ ist und es durch A nur eine Parallele zu BF giebt, so fällt auch AC auf AE . Demnach ist $\angle EAB = R$.

Lehrsatz. Steht eine Gerade auf einer von zwei Parallelen senkrecht, so steht sie auch auf der anderen senkrecht.

4. AB sei $\parallel CD$ (Fig. 86); AC und BD aber seien zwei beliebige Abstände. Halbire AB in E und errichte $EF \perp AB$, betrachte EF als Symmetrale, dann sind EA und FC symmetrisch zu EB und FD , ferner Punkt A zu B ; also auch AC zu BD und daher C zu D .

Fig. 86.



Lehrsatz. Parallele Geraden haben überall gleichen Abstand.

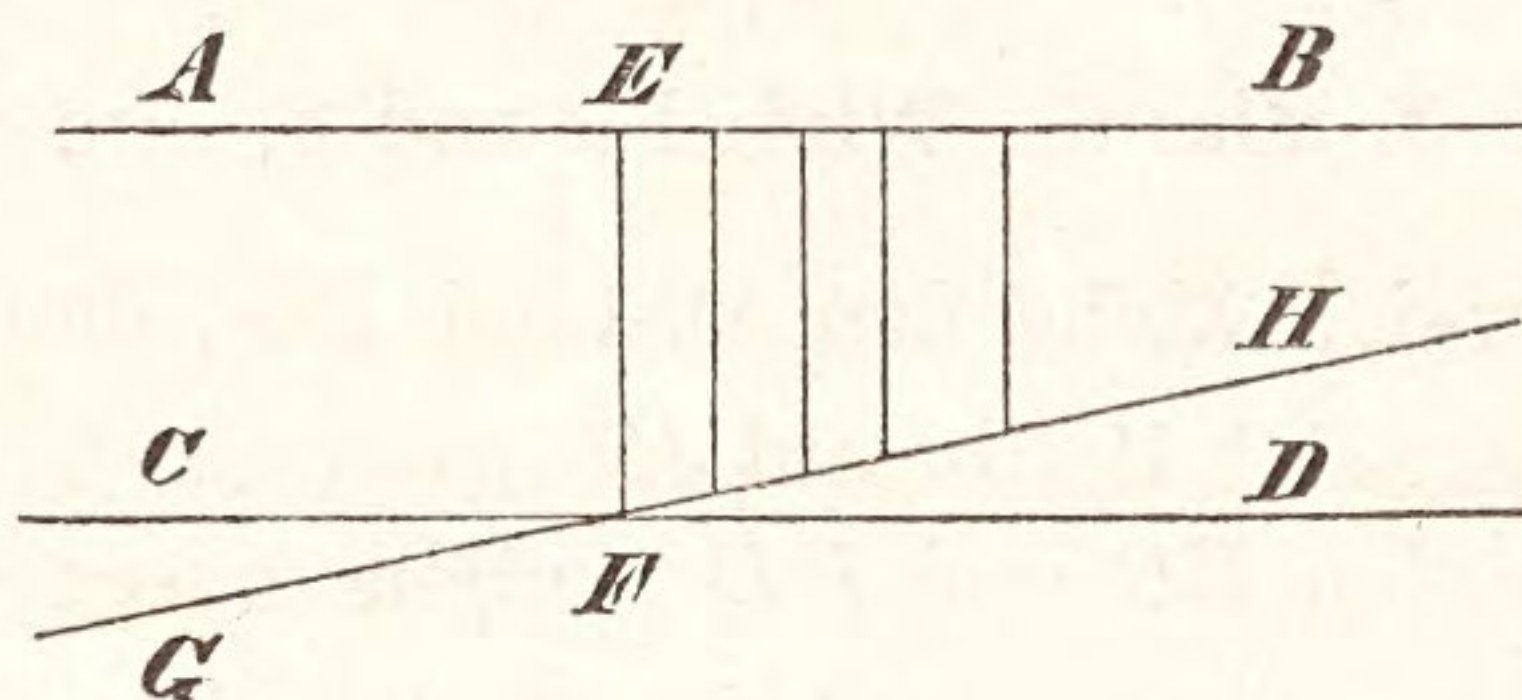
5. Aus der Symmetrie von AC und BD (Fig. 86) folgt sofort:

Lehrsatz. Ist eine Gerade der Symmetralen parallel, so ist es auch die symmetrische Gerade.

Anmerkung (vergl. § 43, 1). Symmetrische Geraden sind also entweder der Symmetralen parallel oder sie schneiden sich auf derselben.

6. AB sei $\parallel CD$ (beide senkrecht EE , Fig. 87). Ziehe durch F eine beliebige andere Gerade. Die Abstände der Punkte derselben von AB werden nach der einen Seite hin immer kleiner, nach der anderen immer grösser. Die Gerade GH muss also mit AB zusammentreffen.

Fig. 87.



Erklärung. Die Geraden FH und EB heissen convergent, wenn man in ihnen die Richtnngen nach der Seite

der abnehmenden, divergent, wenn man dieselben nach der Seite der zunehmenden Abstände betrachtet. (Nach dem Durchschnittspunkte hin — von ihm weg.)

Lehrsatz. Schneidet eine Gerade die eine von zwei Parallelen, so schneidet sie auch die andere.

7. Uebungen. 1. Gieb an Gegenständen im Lehrzimmer a) sich kreuzende; b) parallele Geraden an!

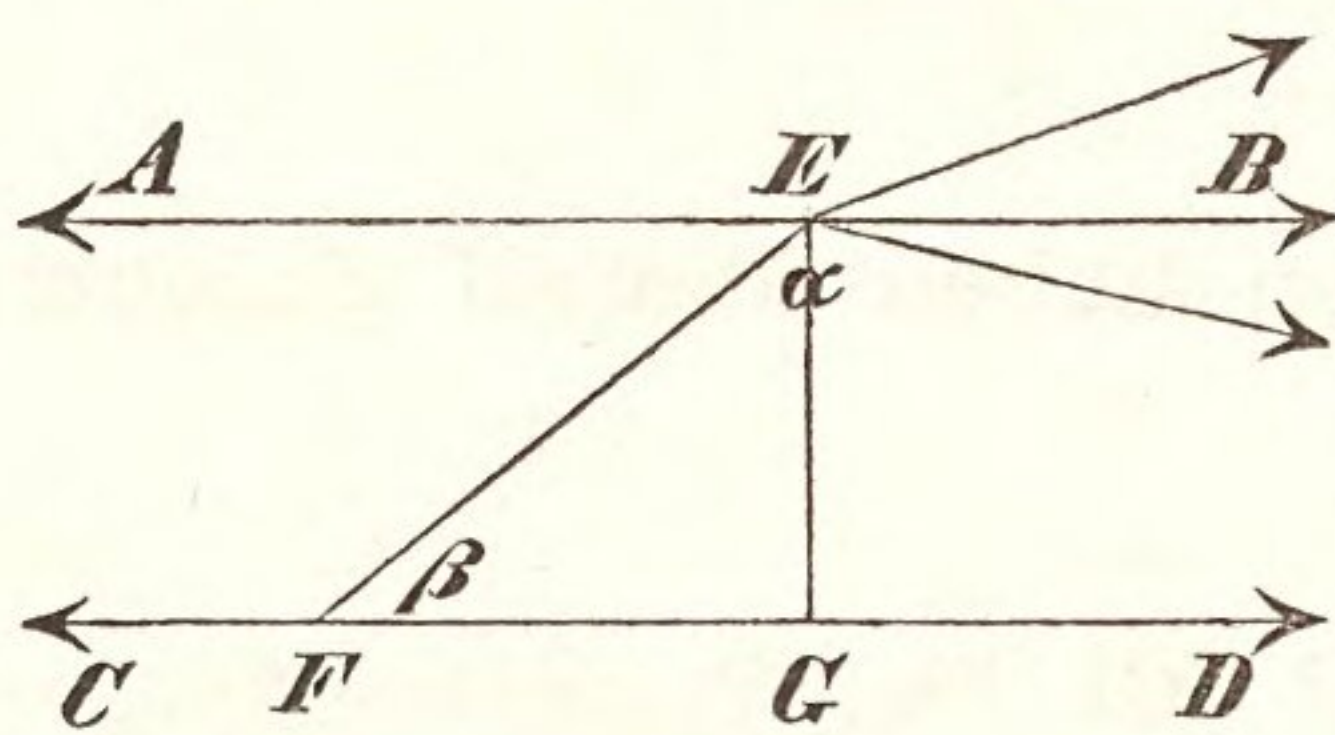
2. Bringe zwei Geraden (zwei Stricknadeln) in eine solche Lage, dass sie sich kreuzen!

3. Zeichne zwei parallele Geraden und mehrere Abstände und miss dieselben!

Das Parallelogramm.

§ 65.

Fig. 88.



1. Zeichne zwei Parallelen AB und CD . Ziehe zwischen denselben eine beliebige Strecke EF . Die Halbstrahlenpaare EB und FD , sowie EA und FC haben gleiche Richtung; die Halbstrahlenpaare EB und FC , sowie EA und FD dagegen haben entgegengesetzte Richtung; die ersteren liegen an derselben, die letzteren an entgegengesetzten Seiten der Verbindungsstrecke ihrer Endpunkte.

Erklärung. Parallele Halbstrahlen heissen direct- oder invers-parallel, je nachdem sie an derselben oder an entgegengesetzter Seite der Verbindungsstrecke ihrer Endpunkte liegen.

2. Miss die Winkel α und β , ihre Summe beträgt $2R$. (Allgemeiner Beweis: Ziehe den Abstand EG , dann ist $\hat{\beta} + \hat{FEG} = R$; $\hat{GEB} = R$.) Dreht sich Halbstrahl EB nach aussen, so wird $\hat{\alpha}$ grösser und die Halbstrahlen EB und FD werden divergent, dreht er sich nach innen, so wird $\hat{\alpha}$ kleiner und die Halbstrahlen werden convergent.

Lehrsatz. Die Summe der Winkel, welche eine Strecke mit zwei auf derselben Seite liegenden Halbstrahlen bildet, ist gleich $2R$, wenn die Halbstrahlen parallel sind; sie

ist $> 2R$, wenn sie divergent, und sie ist $< 2R$, wenn sie convergent sind.

Da eine andere Lage zweier Halbstrahlen an derselben Seite einer Strecke nicht möglich ist, so ist auch die Umkehrung richtig.

Umkehrung. Zwei an derselben Seite der Verbindungsstrecke ihrer Endpunkte liegende Halbstrahlen sind parallel, divergent oder convergent, je nachdem die Summe der zwischenliegenden Winkel $= 2R$, $> 2R$ oder $< 2R$ ist.

3. Wie gross ist die Summe der an einer Seite liegenden Winkel im Quadrat, Rechteck; Rhombus, Rhomboid? (Berücksichtige zur Beantwortung der beiden letzten Fragen, dass die Winkelsumme in diesen Vierecken $= 4R$ ist und dass die gegenüberliegenden Winkel gleich sind.) Wie sind also die gegenüberliegenden Seiten in diesen Vierecken beschaffen?

Erklärung. Ein Viereck, in welchem die gegenüberliegenden Seiten parallel sind, heisst Parallelogramm. Der Abstand der parallelen Seiten heisst Höhe des Parallelogramms. Das Parallelogramm hat zwei Höhen.

Aufgaben. 1. In welchen Parallelogrammen sind die Höhen gleich, in welchen ungleich?

2. Einen Rhombus zu construiren, wenn gegeben sind: a) die Höhe und eine Diagonale; b) eine Seite und die zugehörige Höhe; c) die Höhe und ein Winkel!

4. Aus dem Früheren ergeben sich jetzt durch Zusammenfassung der Einzelresultate die folgenden, allen Parallelogrammen zukommenden Eigenschaften:

Lehrsätze. a) In jedem Parallelogramm sind die Gegenseiten einander gleich.

b) In jedem Parallelogramm sind die Gegenwinkel einander gleich.

c) Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt.

d) In jedem Parallelogramm halbiren die Diagonalen einander.

e) Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn die gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind.

5. Worin stimmen Quadrat und Rechteck überein?

Erklärung. Ein Parallelogramm, in welchem die Winkel rechte sind, heisst rechtwinkliges Parallelogramm.

Anmerkung. Es genügt dazu, dass ein Winkel $1R$ ist. Beweise es!

Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen Parallelogramm sind die Diagonalen einander gleich.

6. Worin stimmen Rhombus und Rhomboid überein?

Erklärung. Ein Parallelogramm, in welchem die Winkel schief sind, heisst schiefwinkliges Parallelogramm.

Anmerkung. Auch hier genügt es, dass ein Winkel $\geq R$ ist.

Lehrsatz. In jedem schiefwinkligen Parallelogramm sind die Diagonalen ungleich.

7. Worin stimmen Quadrat und Rhombus überein?

Erklärung. Ein Parallelogramm, in welchem die Seiten einander gleich sind, heisst gleichseitiges Parallelogramm.

Anmerkung. Es genügt, dass zwei anstossende Seiten gleich sind. Beweis!

Lehrsatz. In jedem gleichseitigen Parallelogramm stehen die Diagonalen auf einander senkrecht und halbiren die Winkel.

8. Worin stimmen Rechteck und Rhomboid überein?

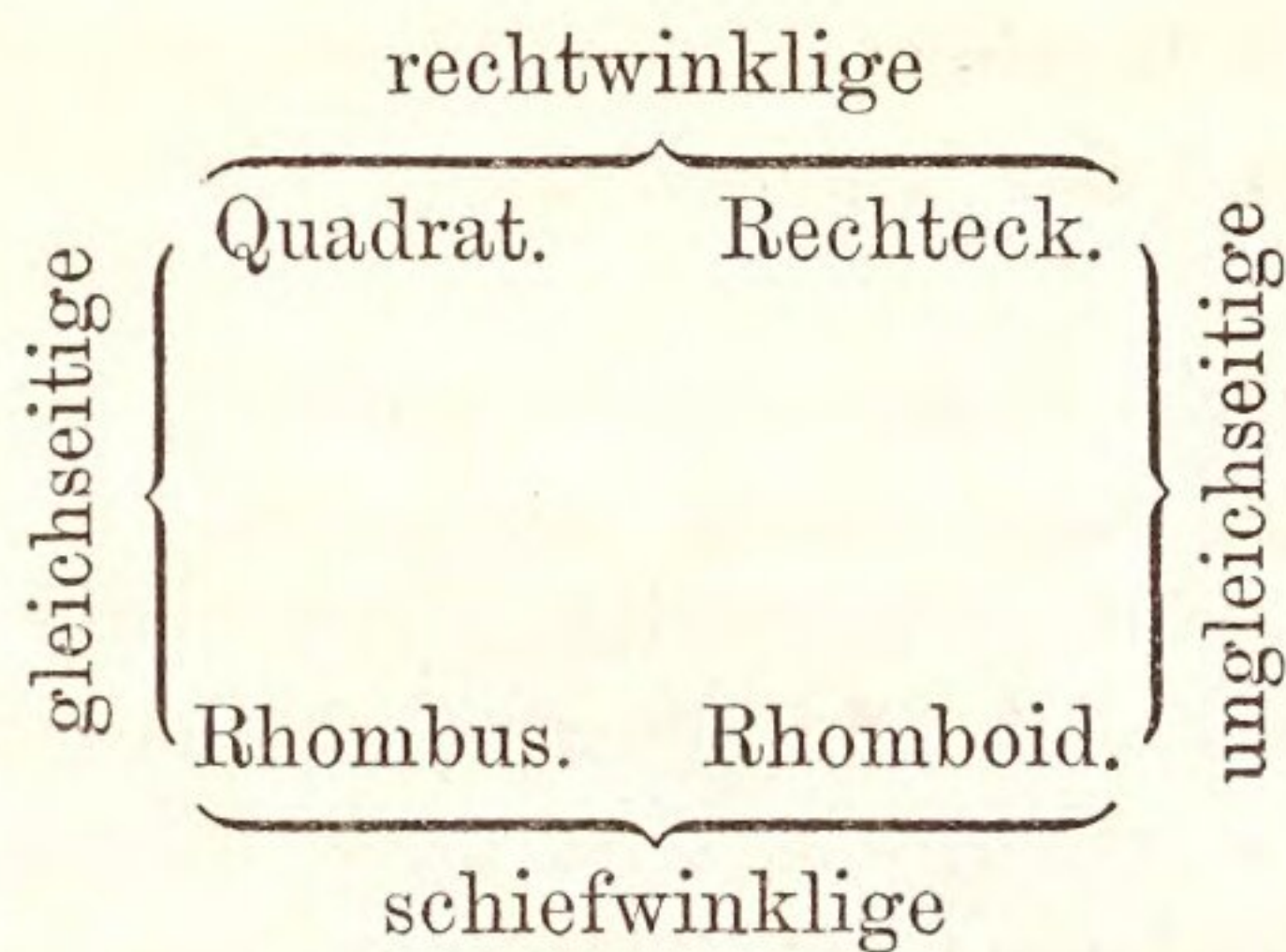
Erklärung. Ein Parallelogramm, in welchem die Seiten ungleich sind, heisst ungleichseitiges Parallelogramm.

Anmerkung. Auch hier genügt die Ungleichheit zweier anstossenden Seiten.

Lehrsatz. In jedem ungleichseitigen Parallelogramm stehen die Diagonalen auf einander schief und halbiren die Winkel nicht.

§ 66.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich folgende Eintheilung der Parallelogramme:



Erklärungen. a) Das gleichseitig-rechtwinklige Parallelogramm heisst Quadrat;

b) das ungleichseitig-rechtwinklige Parallelogramm heisst Rechteck oder Oblongum;

c) das gleichseitig-schiefwinklige Parallelogramm heisst Rhombus;

d) das ungleichseitig-schiefwinklige Parallelogramm heisst Rhomboid.

§ 67.

Parallele Geraden mit Transversalen.

1. Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten (Fig. 89), so heisst die schneidende Linie Transversale. Es entstehen acht Winkel.

Fig. 89.

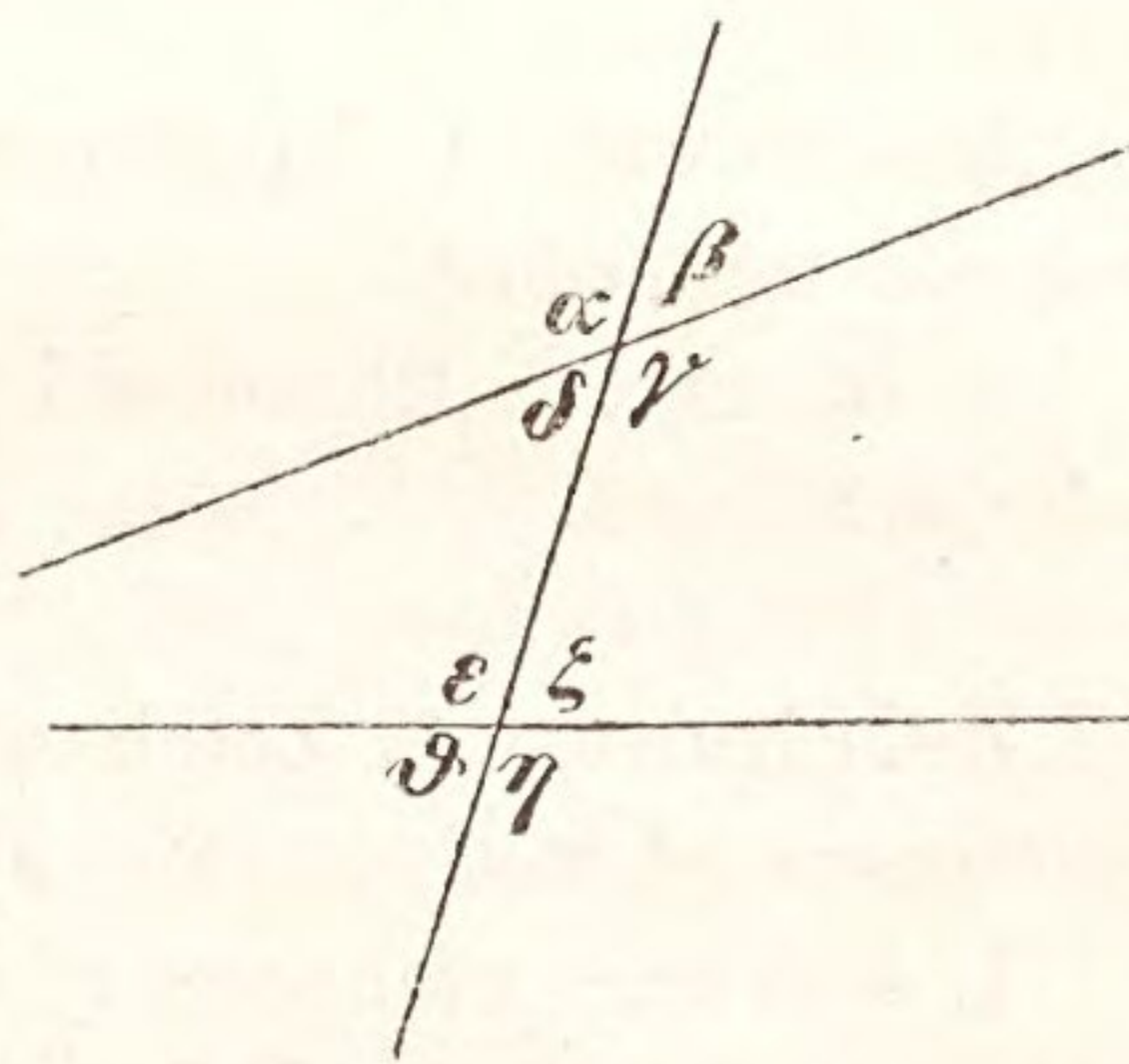
Frage: Welche von diesen Winkeln sind Scheitel-, welche Nebenwinkel?

Erklärungen. a) Correspondirende Winkel heissen zwei Winkel, welche auf derselben Seite der Transversalen und auf entsprechenden Seiten der Geschnittenen liegen.

b) Wechselwinkel heissen zwei Winkel, welche auf entgegengesetzten Seiten der Transversalen und auf nicht entsprechenden Seiten der Geschnittenen liegen.

c) Gegenwinkel heissen Winkel, welche auf derselben Seite der Transversalen und auf nicht entsprechenden Seiten der Geschnittenen liegen.

Aufgaben. a) Gieb in der Fig. 89 zu jedem der acht Winkel den zugehörigen correspondirenden, Wechsel- und Gegenwinkel an!



b) Uebungen im Bestimmen der Winkelpaare bei anderen Lagen der Geschnittenen und der Transversalen.

2. Sind die geschnittenen Linien parallel, so folgt aus § 65, 2, dass die Gegenwinkel supplementär sind; leicht lässt sich aber hieraus erweisen, dass die correspondirenden Winkel und die Wechselwinkel gleich sind (weil sie gleiche Supplemente haben; Scheitelwinkel).

Ferner ist direct ersichtlich, dass diese Eigenschaften nicht mehr vorhanden sind, sobald eine der Parallelen ihre Lage ändert.

Lehrsatz. Parallele Geraden und nur solche bilden mit jeder Transversalen gleiche correspondirende Winkel, gleiche Wechselwinkel und supplementäre Gegenwinkel.

Umkehrung. Gerade Linien sind parallel, wenn eine Transversale mit ihnen gleiche correspondirende oder gleiche Wechsel- oder supplementäre Gegenwinkel bildet.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden die Parallele zu construiren.

Auflösung entweder mittels des Abstandes oder nach der Umkehrung oder endlich durch Construction eines Parallelogramms.

§ 68.

Uebungsstoff.

Rechnen. 1. In einem Rhombus sei ein Winkel $= 25^{\circ}$; wie gross sind die anderen?

2. In einem Rhomboid sei ein Winkel $= 70^{\circ}$; wie gross sind die anderen?

Zeichnen. 3. Zeichne einen Rhombus, in welchem eine Seite $a = 0,038 \text{ m}$ ist und sich der spitze Winkel zum stumpfen wie $1:3$ verhält!

4. Zeichne mehrere gleichseitige Dreiecke mit demselben Mittelpunkt und mit parallelen Seiten!

5. Zeichne mehrere Rhomhoide, welche a) die Grundlinie und die Höhe; b) die Höhe und einen Winkel; c) einen Winkel und die ihn theilende Diagonale; d) einen Winkel und die ihm gegenüberliegende Diagonale; e) eine Höhe und eine Diagonale gemeinschaftlich haben.

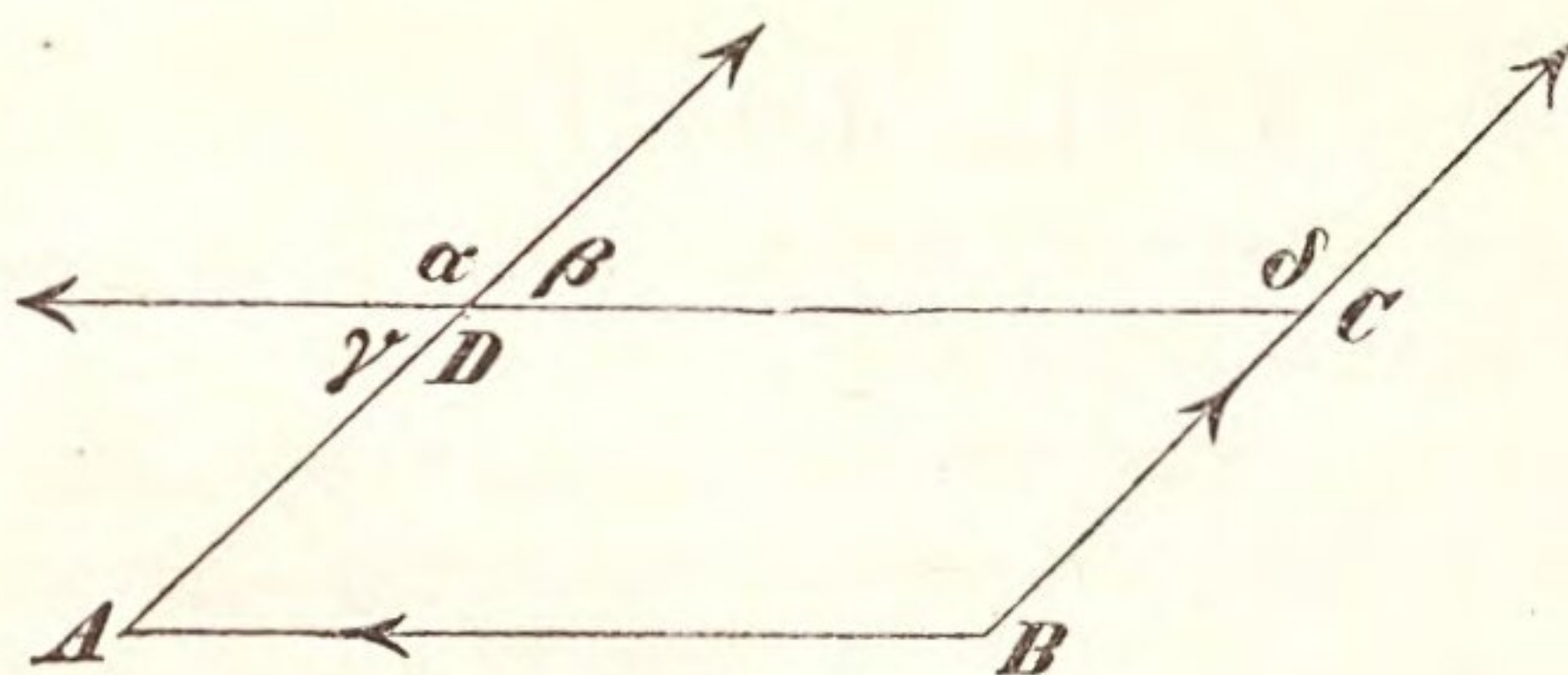
§ 69.

Parallelwinkel.

1. Verlängere die Seiten eines Parallelogramms, die in einer Ecke zusammenstossen (Fig. 90). $\hat{\alpha}$ und $\hat{B}$ haben direct-parallele Schenkel; $\hat{D}$ und $\hat{B}$

invers-parallele Schenkel;
bei den $\angle\angle\beta$ und B , sowie
bei γ und B ist ein Schenkel-
paar direct-, das andere
invers-parallel.

Fig. 90.



Erklärung. Winkel, deren Schenkel parallel sind, heissen Parallelwinkel und zwar: directe Parallelwinkel, wenn die Schenkel direct-, inverse Parallelwinkel, wenn sie invers-parallel sind, und gemischte Parallelwinkel, wenn ein Schenkelpaar direct-, das andere invers-parallel ist.

2. Wie aus Fig. 90 ersichtlich, ist $\hat{D} = \hat{\alpha} = \hat{\delta} = \hat{B}$; dagegen $\hat{\beta} + \hat{\alpha} = 2R$; $\hat{\gamma} + \hat{\alpha} = 2R$, also auch $\hat{\beta} + \hat{B} = 2R$ und $\hat{\gamma} + \hat{B} = 2R$; daher:

Lehrsatz. Directe und inverse Parallelwinkel sind gleich; gemischte Parallelwinkel sind supplementär.

Aufgabe. Beweise den Lehrsatz durch paralleles Verschieben des einen der beiden Winkel!

3. Uebungsstoff.

Anschauung. 1. Gieb im Lehrzimmer directe, inverse und gemischte Parallelwinkel an!

Zeichnen. 2. Zeichne directe, inverse, gemischte Parallelwinkel!
3. Zeichne einen Winkel von 75° , 105° , 200° und einen directen Parallelwinkel!

4. Zeichne einen Winkel von 65° , 175° , 320° und einen inversen Parallelwinkel!

5. Zeichne einen Winkel von 35° , 135° , 235° und einen gemischten Parallelwinkel!

XVIII. Das Dreieck im Allgemeinen.

(Vergleiche § 62.)

§ 70.

1. Sätze über die Winkelsumme u. s. w. siehe § 62.

Grundsatz. Die Summe zweier Dreiecksseiten ist grösser als die dritte.

Beziehungen zwischen den Gegenständen.

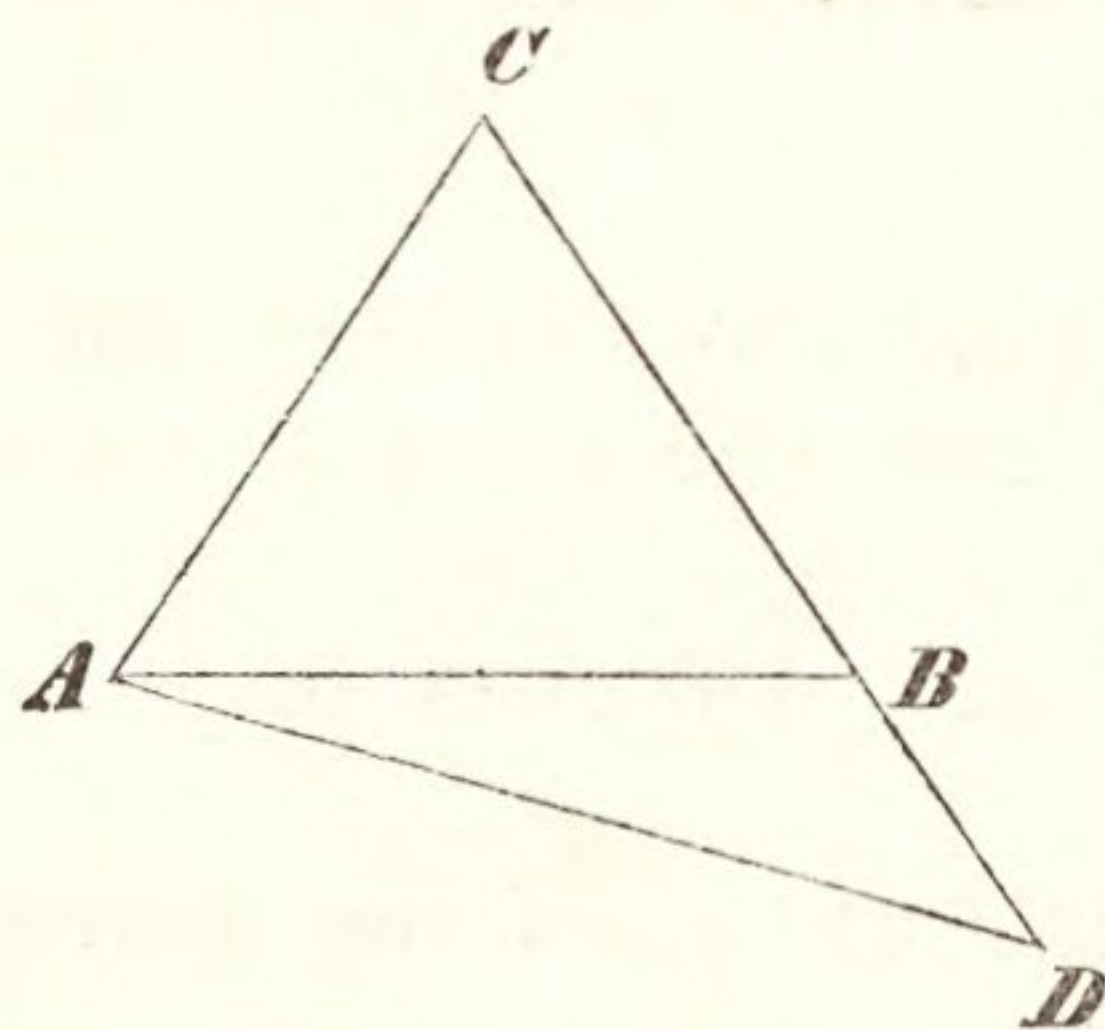
2. Der in § 53, 2 durch Symmetrie bewiesene Lehrsatz lässt sich auch so aussprechen:

Lehrsatz. Gleiche Seiten eines Dreiecks haben gleiche Gegenwinkel.

In § 53, 5 und 6 ist ferner bewiesen worden:

Umkehrung. Gleiche Winkel eines Dreiecks haben gleiche Gegenseiten.

Fig. 91.



3. Denke dir im gleichschenkligen Dreiecke ABC (Fig. 91) die Basis AB gedreht um A bis in die Lage AD , dann ist der Schenkel CB um BD grösser geworden, ebenso der Gegenwinkel von CD um das Stück BAD ; um ebensoviel aber ist der Gegenwinkel von AC $\hat{D}$ kleiner geworden als der Aussenwinkel $\hat{B}$.

Lehrsatz. Die grössere Seite eines Dreiecks hat den grösseren Gegenwinkel.

Da nun mit dem Wachsen der Seite der Gegenwinkel wächst, so gilt auch die

Umkehrung. Der grössere Winkel eines Dreiecks hat die grössere Gegenseite.

4. Beim Vortrage einer schon gefundenen mathematischen Wahrheit pflegt man sich einer besonderen präzisen Form zu bedienen. Man theilt nämlich Alles, was zum Beweise nöthig ist, in drei Ab-

schnitte: 1. Zunächst beschreibt man die Figur, an der etwas bewiesen werden soll, indem man sie nennt und diejenigen Eigenschaften anführt, die man schon kennt und aus welchen die zu findende hervorgeht; der Theil, welcher diese Angaben umfasst, heisst Voraussetzung (Hypothese). 2. Sodann giebt man genau an, was man beweisen soll; dieser Theil heisst Behauptung (Thesis). 3. Endlich beweist man die Behauptung mit Hilfe schon bewiesener Sätze; dieser Theil heisst der (eigentliche) Beweis.

In allen Theilen hat man sich eines kurzen und zutreffenden Ausdrucks zu bedienen und die Gedanken, welche zum Beweise nöthig sind, möglichst geordnet vorzutragen.

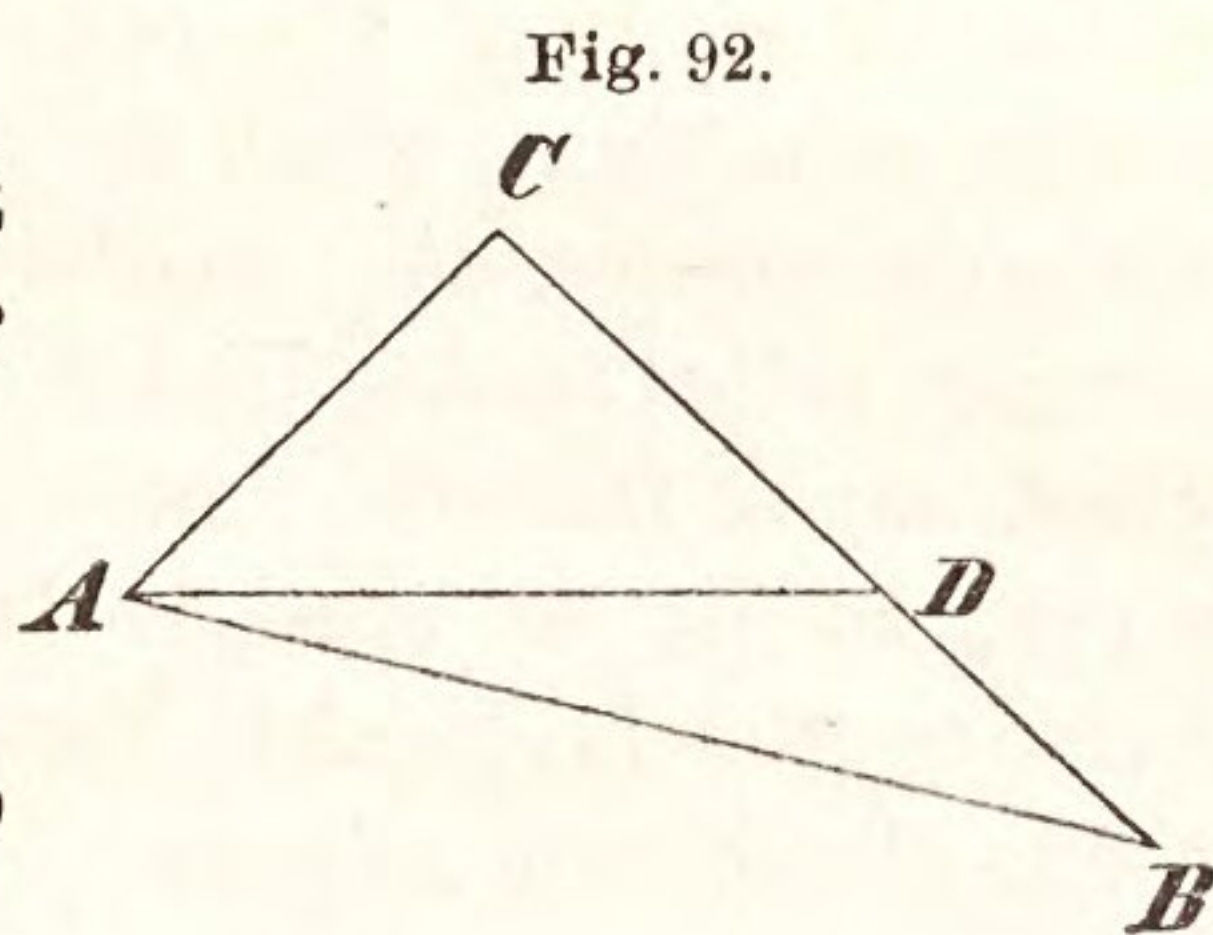
Als Beispiel für die zu wählende Form soll der Beweis des vorigen Lehrsatzes dienen. (Wenn aus zwei Urtheilen — Prämissen — ein Schluss gezogen wird, so deutet man dies durch das Wort „folglich“ oder einen Strich an.)

Voraussetzung. Gegeben ist ein Dreieck ABC , in welchem $CB > CA$ ist.

Behauptung. $\hat{A} > \hat{B}$.

Beweis. Man mache $CD = CA$, dann ist

$$\begin{array}{l} \hat{A} > CAD \text{ (Ganzes und Theil)} \\ \hat{CAD} = \hat{ADC} \text{ (gleichschenkliges Dreieck)} \\ \hline \hat{A} > \hat{ADC} \\ \hat{ADC} > \hat{B} \text{ (Aussenwinkel)} \\ \hline \hat{A} > \hat{B} \text{ (Grundsatz).} \end{array}$$

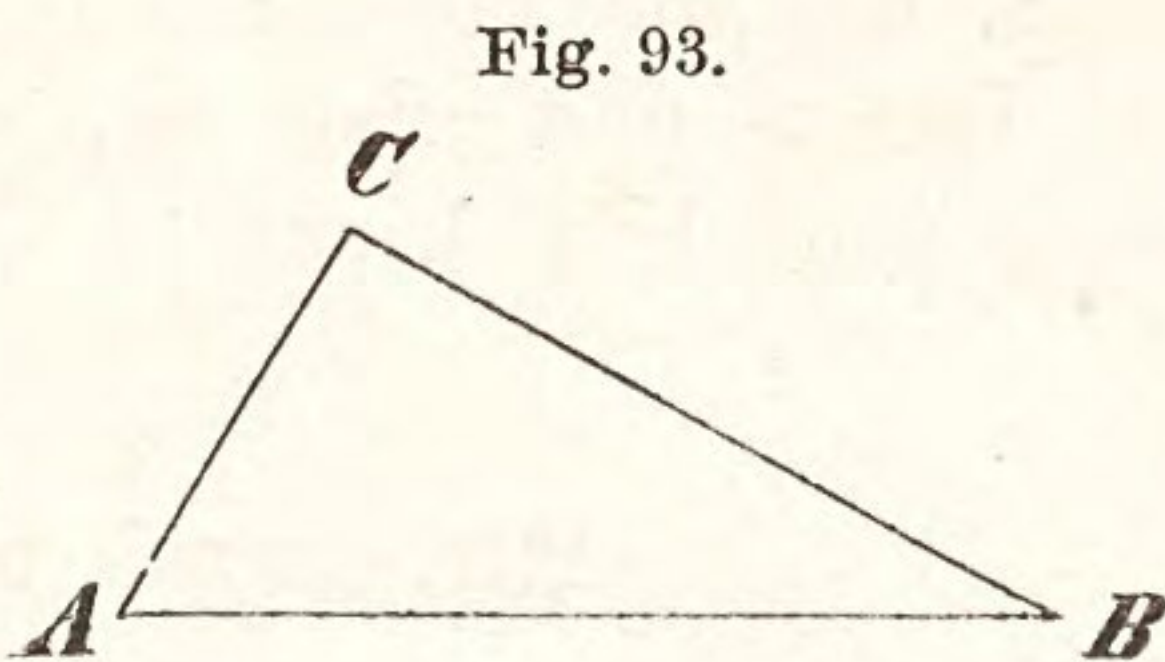


Die Umkehrungen werden gewöhnlich in der Weise bewiesen, dass man alle übrigen, ausser dem zu beweisenden möglichen Fälle durchgeht und nachweist, dass man bei ihrer Annahme auf Widersprüche stösst (indirecter Beweis). Als Beispiel diene auch hier die obige Umkehrung.

Voraussetzung. Gegeben ein Dreieck ABC , in welchem $\hat{A} > \hat{B}$ ist.

Behauptung. $BC > AC$.

Beweis (indirect). Wäre BC nicht $> AC$, so müsste entweder $BC = AC$ oder $BC < AC$ sein.



1. Angenommen, es wäre $BC = AC$, so müsste auch $\hat{A} = \hat{B}$ sein (nach dem Lehrsatz in 2). Widerspruch gegen die Voraussetzung; folglich diese Annahme falsch.
2. Angenommen, es wäre $BC < AC$, so müsste auch $\hat{A} < \hat{B}$ sein (nach vorigem Lehrsatz). Widerspruch gegen die Voraussetzung; folglich auch diese Annahme falsch.

Da andere Fälle nicht möglich sind, so muss $BC > AC$ sein.

Anmerkung. Die indirecten Beweise sind übrigens nicht nur nicht empfehlenswerth (besonders für den Anfangsunterricht), sondern auch überflüssig. Sobald nachgewiesen ist, dass die Eigenschaft, welche in der Umkehrung als bekannt vorausgesetzt wird, nur dann vorhanden sein kann, wenn die andere Eigenschaft (die in der Umkehrung bewiesen werden soll) zugleich da ist, so ist die Richtigkeit der Umkehrung selbstverständlich. Wenn bewiesen worden ist, dass gleichen Seiten eines Dreiecks, aber nur solchen, gleiche Winkel gegenüberliegen, so ist es ohne Weiteres einleuchtend, dass, wenn in einem Dreiecke gleiche Winkel vorhanden sind, auch die gegenüberliegenden Seiten gleich sein müssen.

5.

Uebungsstoff.

1. Welche Seite ist in einem a) stumpfwinkligen; b) rechtwinkligen; c) spitzwinkligen Dreiecke die grösste?
2. Zeichne in einem rechtwinkligen Dreiecke die zur Hypotenuse gehörige Höhe und zeige dann, dass die entstandenen Dreiecke unter einander und mit dem ursprünglichen Dreiecke gleichwinklig sind!
3. Zeichne ein a) gleichseitiges; b) gleichschenkliges; c) ungleichseitiges Dreieck und construire dann in jedem dieser Dreiecke die drei Höhen! (Schneiden sich in einem Punkte.)
4. Wo liegt der Durchschnitt der drei Höhen im rechtwinkligen Dreiecke?
5. Wann liegt der Durchschnittspunkt der drei Höhen eines Dreiecks a) innerhalb desselben; b) ausserhalb; c) im Umfange?
6. Zeichne ein ungleichseitiges spitzwinkliges Dreieck und seine drei Höhen und gieb an, welche von den sechs entstandenen Dreiecken winkelig sind!

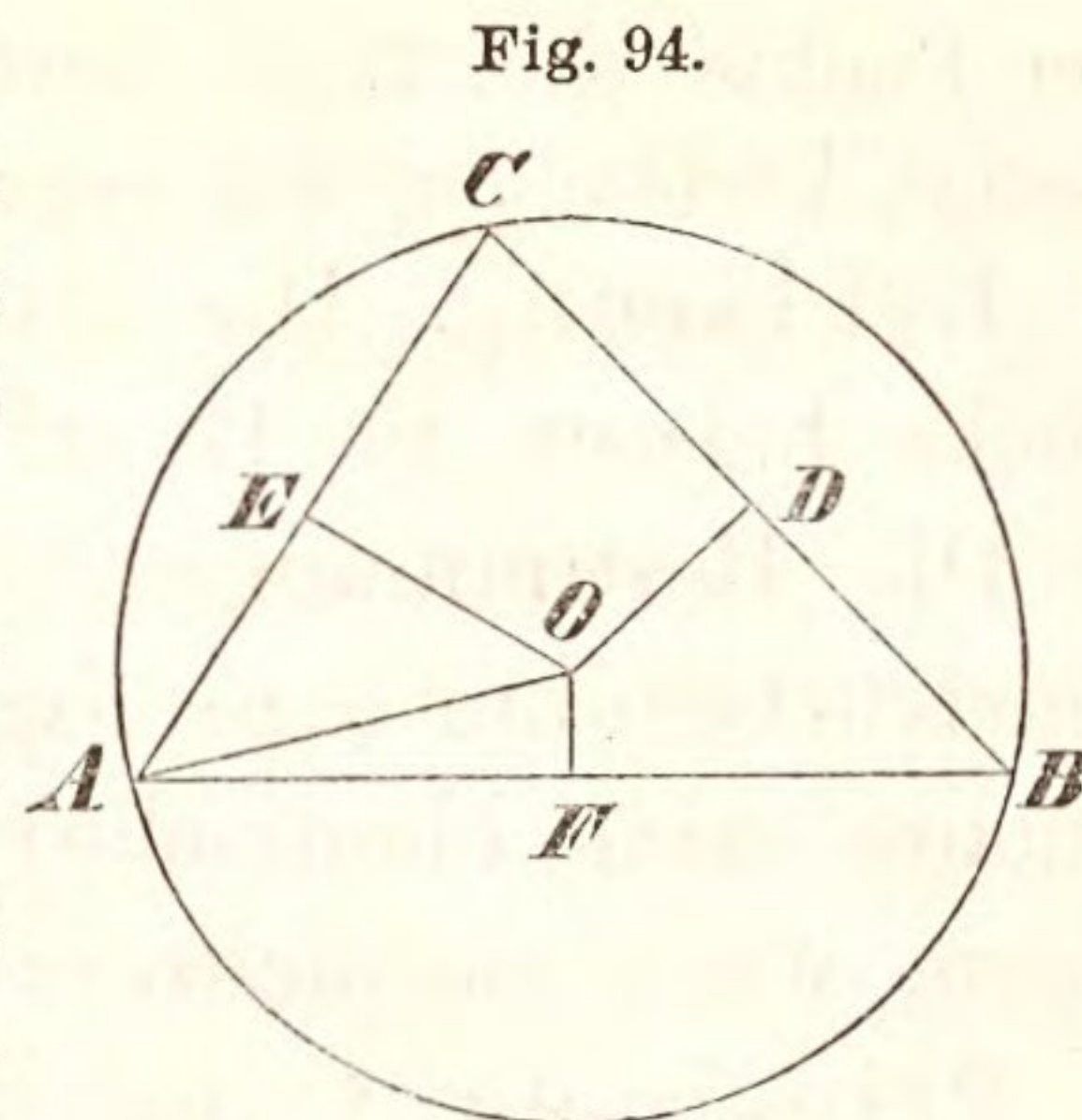
§ 71.

Ein- und umgeschriebene Kreise.

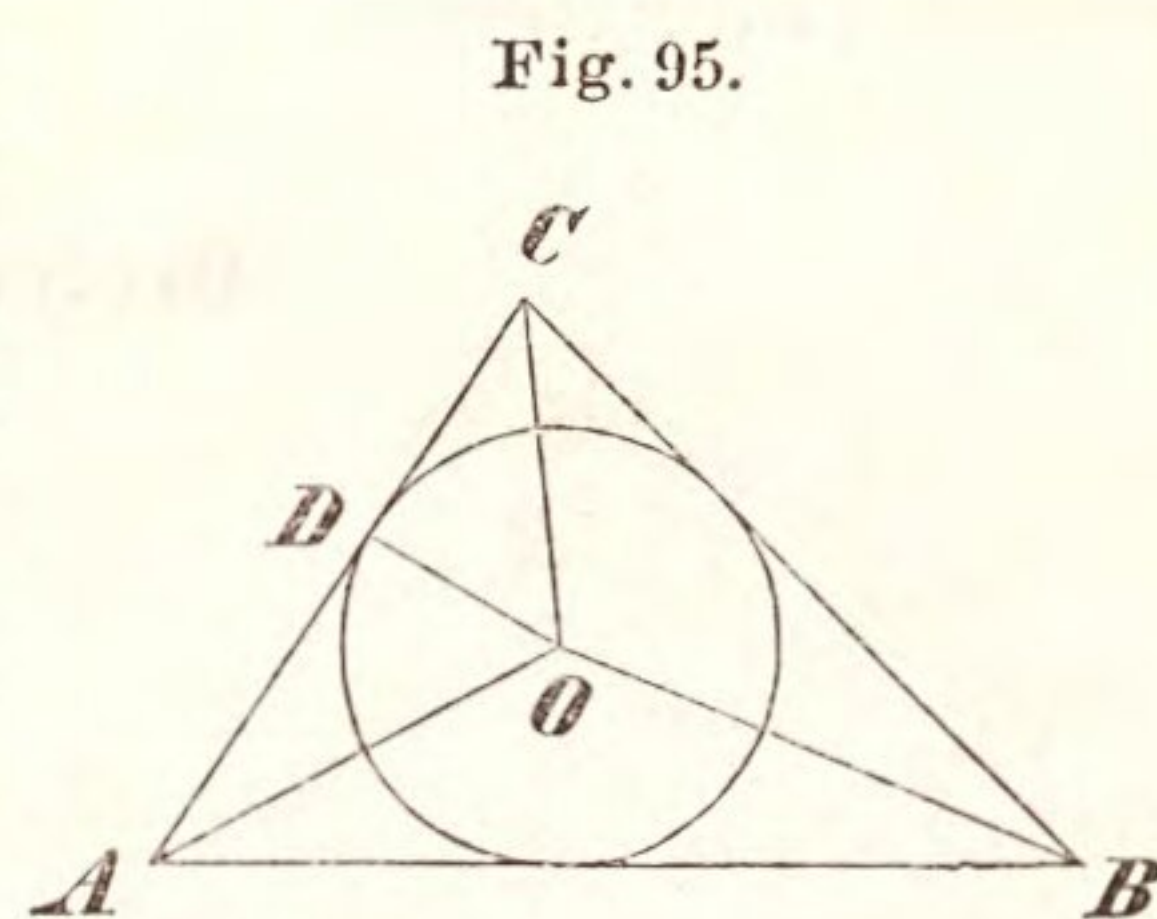
1. Zeichne ein beliebiges Dreieck und auf zwei Seiten die Mittelsenkrechten DO und EO . Der Punkt O ist sowohl von B und C ,

als auch von C und A gleichweit entfernt (warum?); folglich auch von A und B ; die Mittelsenkrechte von AB geht demnach auch durch O . Ein Kreis mit OA um O geht durch B und C .

Lehrsatz. Die Mittelsenkrechten auf den Seiten eines Dreiecks schneiden sich in demselben Punkte, dem Mittelpunkte des umgeschriebenen Kreises.



2. Zeichne ein beliebiges Dreieck und halbire zwei Winkel durch AO und BO . Der Punkt O ist sowohl von den Schenkeln AC und AB , als auch von BA und BC gleichweit entfernt; folglich auch von CA und CB . Demnach geht die Halbierungslinie von $\hat{C}$ ebenfalls durch O . Ein mit dem Abstand OD um O geschriebener Kreis berührt also die Seiten (warum?).



Lehrsatz. Die winkelhalbirenden Transversalen eines Dreiecks schneiden sich in demselben Punkte, dem Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises.

3. Uebungsstoff.

1. Schreibe einem a) spitzwinkligen; b) rechtwinkligen; c) stumpfwinkligen Dreiecke einen Kreis um! Gieb die Lage der Mittelpunkte an!
2. Wo muss der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises für ein a) gleichschenkliges; b) gleichseitiges Dreieck liegen?
3. Schreibe einem a) spitzwinkligen; b) rechtwinkligen; c) stumpfwinkligen Dreiecke einen Kreis ein!
4. Kann der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises im Umfange oder ausserhalb des Dreiecks liegen?
5. In welcher Geraden muss der Mittelpunkt des einem gleichschenkligen Dreiecke eingeschriebenen Kreises liegen?

§ 72.

Construction der Figuren. Congruenzsätze.

1. Aus den bisher gemachten Constructionen ist ersichtlich, dass durch die Grösse gewisser Strecken und Winkel die gegenseitige Lage

aller Punkte eine Figur bestimmt ist, dass man also durch gesetzmässige Verbindung der gegebenen Stücke die Figur construiren kann.

Erklärung. Die zur Construction einer Figur gegebenen Stücke heissen die Bestimmungsstücke der Figur.

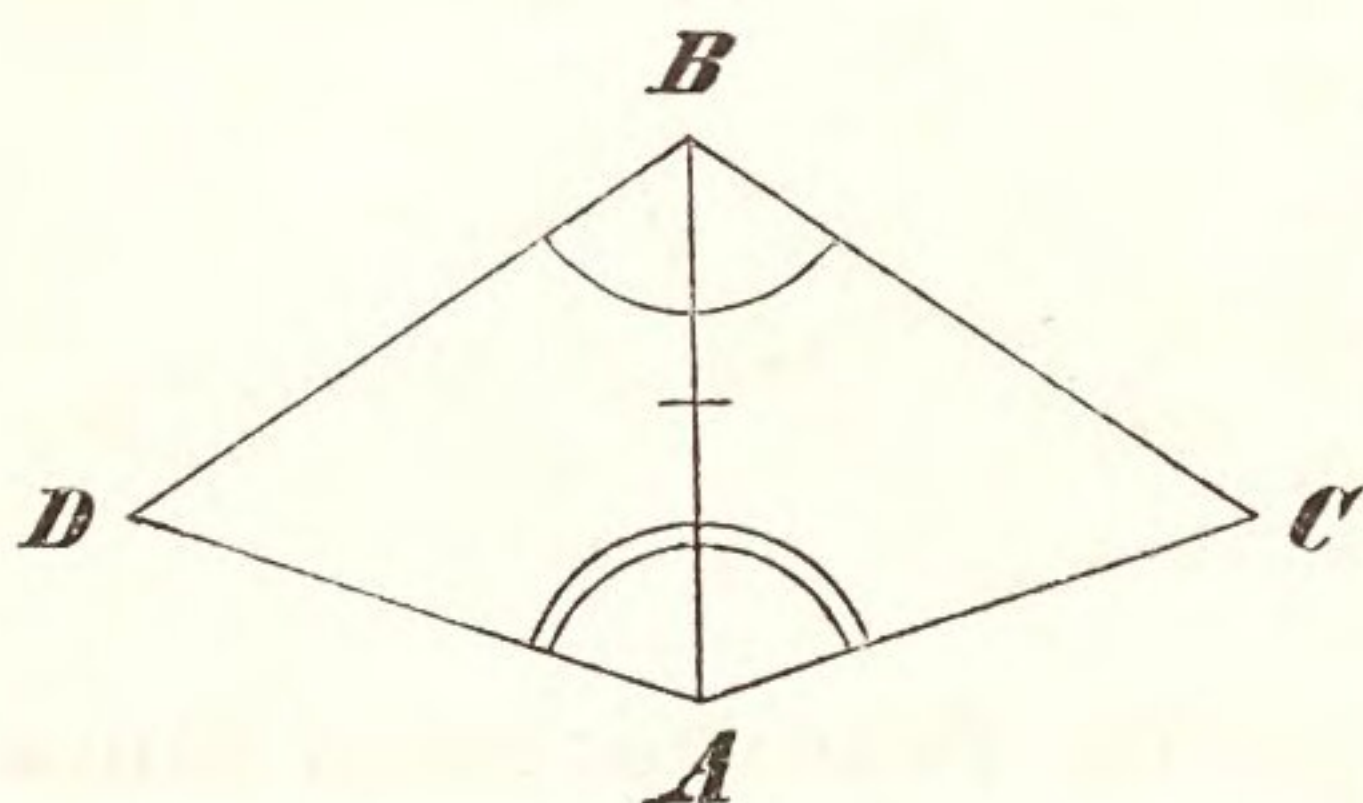
Die Bestimmungsstücke heissen eindeutig, wenn die Construction nur eine Figur oder mehrere vertauschbare (congruente oder identische) Figuren liefert, mehrdeutig dagegen, wenn sie mehrere nicht vertauschbare Figuren liefert.

Princip der Congruenz. Stimmen zwei Figuren in den eindeutigen Bestimmungsstücken überein, so sind sie congruent (identisch).

2.

Dreiecksconstructionen.

Fig. 96.



I. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind. $c = 60 \text{ mm}$; $\hat{A} = 67^\circ$; $\hat{B} = 50^\circ$.

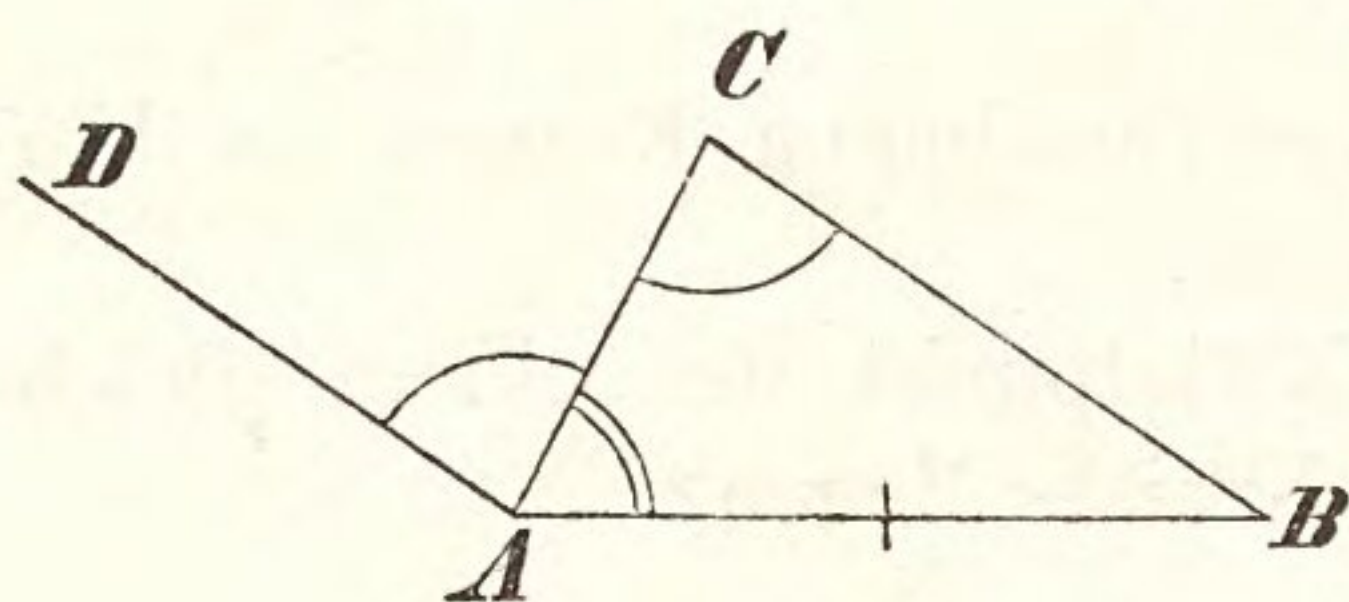
Ergebniss. Das Dreieck ist eindeutig bestimmt.

Lehrsatz. Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Der Beweis ist auch durch Symmetrie leicht zu führen, wenn man die Dreiecke wie in Fig. 96 an einander legt oder bei der Construction die Winkel auf beiden Seiten der Geraden anträgt.

II. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel gegeben sind. $c = 50 \text{ mm}$; $\hat{A} = 43^\circ$; $\hat{C} = 80^\circ$.

Fig. 97.



Zur Construction. $\hat{C}$ wird an $\hat{A}$ angetragen und durch B zu dem freien Schenkel die Parallele gezogen.

Ergebniss. Das Dreieck ist eindeutig bestimmt.

Lehrsatz. Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Beweis unabhängig von der Construction durch Zurückführung auf I mittels der Winkelsumme.

Die Sätze I und II lassen sich so zusammenfassen:

Erster Congruenzsatz. Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen.

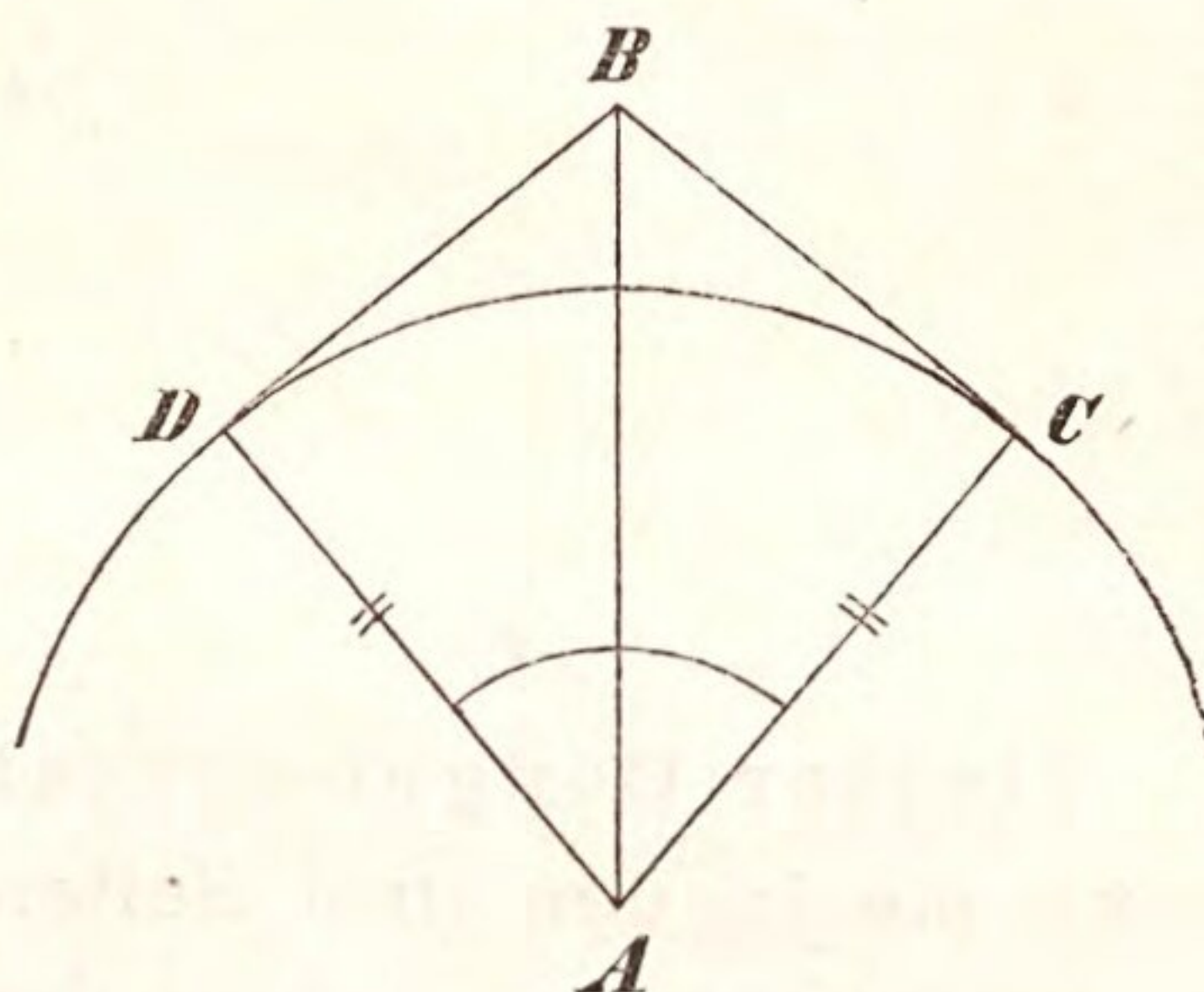
III. Ein Dreieck zu construiren, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind. $AB = 46 \text{ mm}$, $AC = 72 \text{ mm}$; $\hat{A} = 40^\circ$.

Ergebniss. Das Dreieck ist eindeutig bestimmt.

Zweiter Congruenzsatz. Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Unabhängiger Beweis durch Symmetrie (Fig. 98).

Fig. 98.



IV. Ein Dreieck zu construiren, wenn zwei Seiten und der Gegenwinkel der grösseren von beiden gegeben sind. $AB = 40 \text{ mm}$, $BC = 50 \text{ mm}$; $\hat{A} = 60^\circ$.

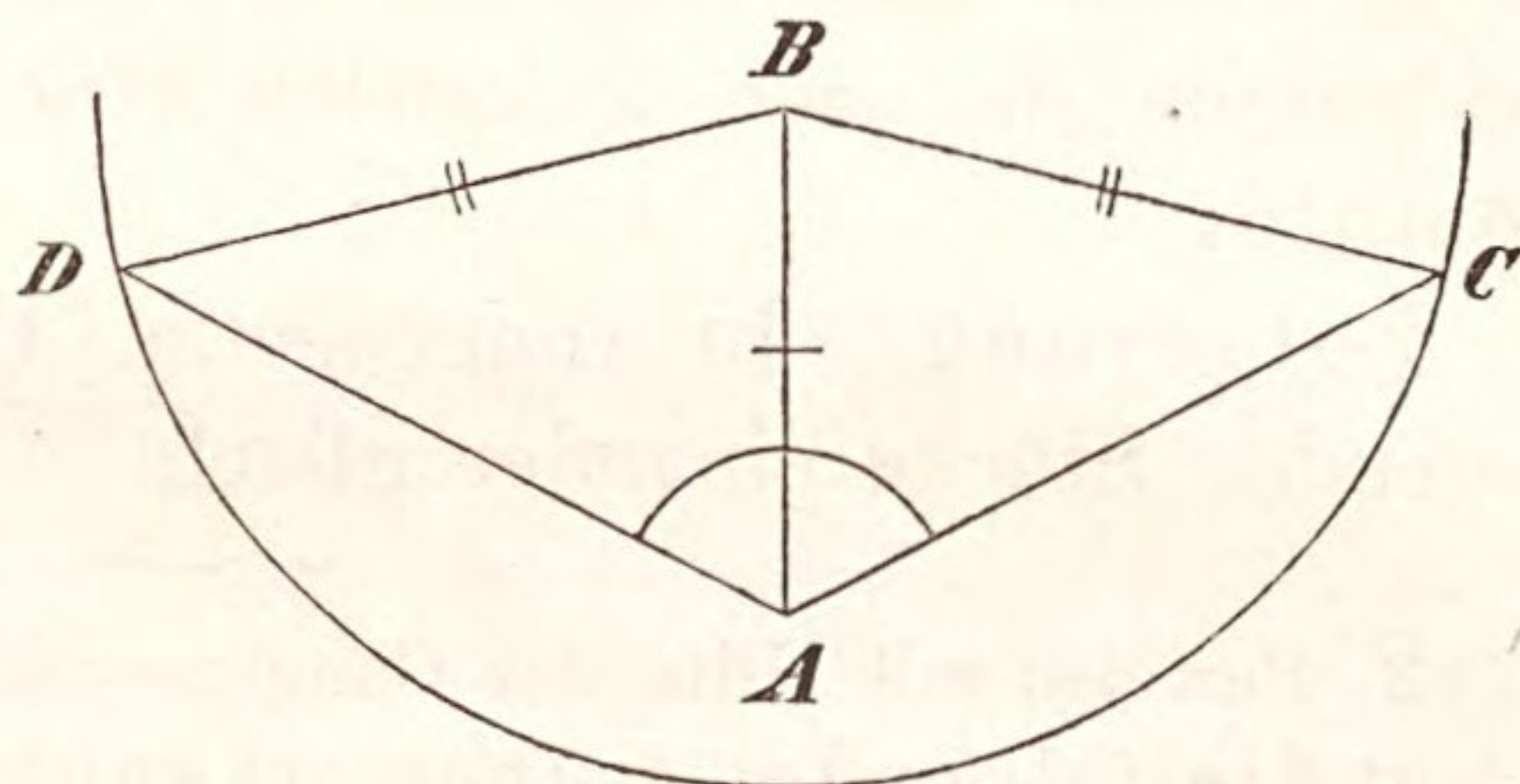
Der Kreis mit BC um B schneidet den freien Schenkel von $\hat{A}$ nur einmal (warum?).

Ergebniss. Das Dreieck ist eindeutig bestimmt.

Dritter Congruenzsatz. Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der grösseren von beiden übereinstimmen.

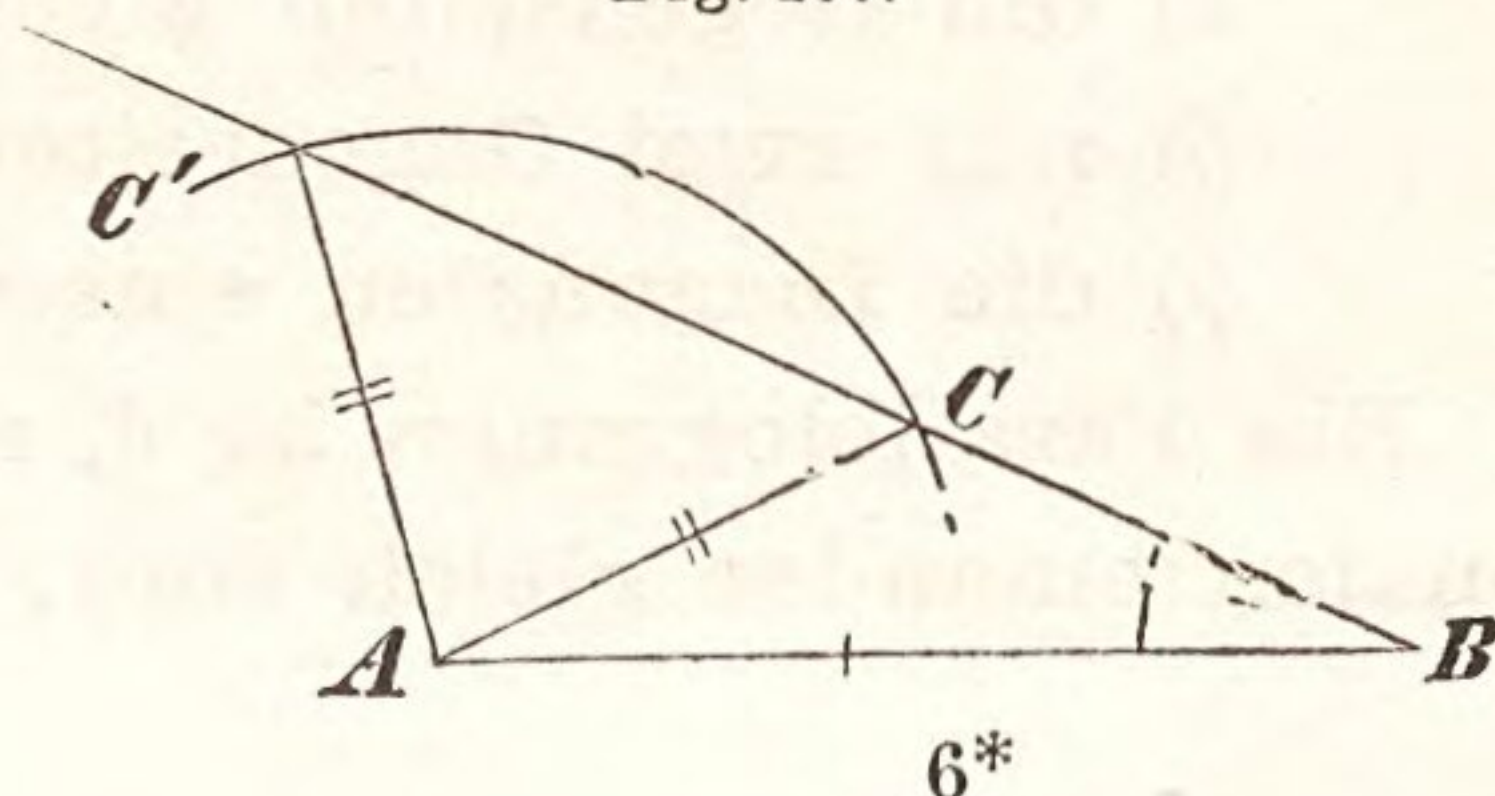
Unabhängiger Beweis durch Symmetrie (Fig. 99).

Fig. 99.



V. Ein Dreieck zu construiren, wenn zwei Seiten und der Gegenwinkel der kleineren Seite gegeben sind. $AB = 52 \text{ mm}$, $AC = 38 \text{ mm}$; $\hat{B} = 46^\circ$.

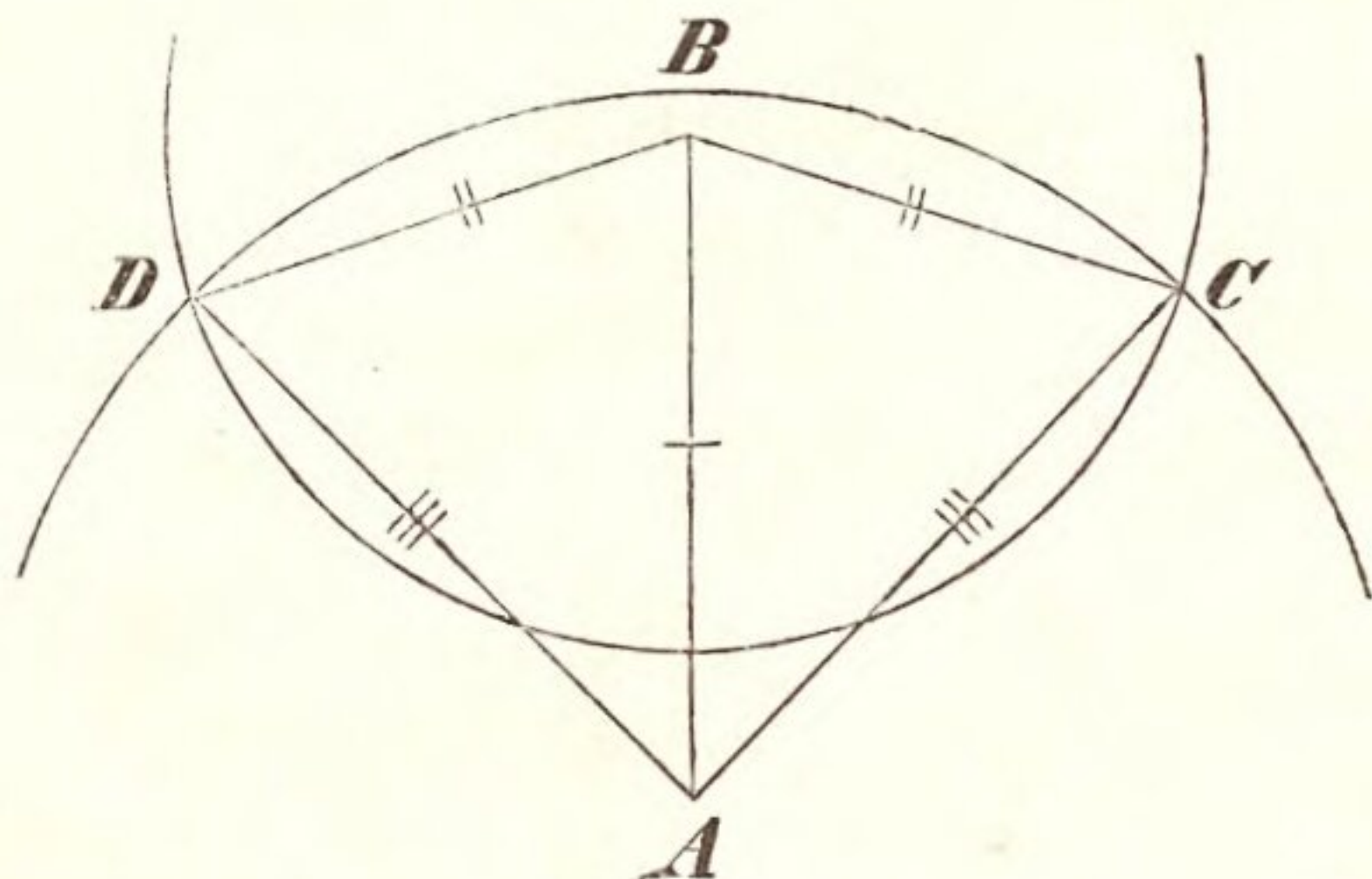
Fig. 100.



Ergebniss. Das Dreieck ist zweideutig bestimmt.

Bedingung der Möglichkeit. Die kleinere Seite darf nicht kleiner als die zur dritten Seite zugehörige Höhe sein.

Fig. 101.



VI. Ein Dreieck zu construiren, wenn die drei Seiten gegeben sind. $AB = 53 \text{ mm}$, $BC = 48 \text{ mm}$, $AC = 38 \text{ mm}$.

Ergebniss. Das Dreieck ist eindeutig bestimmt.

Bedingung der Möglichkeit. Die Summe zweier Seiten muss grösser als die dritte sein.

Vierter Congruenzsatz. Dreiecke sind congruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Unabhängiger Beweis durch Symmetrie (Fig. 101).

§ 73.

Anwendungen der Congruenzsätze.

1. Wenn man congruente Figuren zur Deckung bringt, so heissen die sich deckenden Stücke gleichliegend oder homolog.

Folgerung. In congruenten Figuren sind die gleichliegenden Stücke einander gleich.

2. Beweise mit Hilfe der Congruenzsätze

a) die folgenden früher erkannten Sätze: In jedem Parallelogramm sind α) die Gegenseiten gleich, β) die Gegenwinkel gleich; ferner γ) halbiren die Diagonalen einander.

Sodann: δ) In jedem rechtwinkligen Parallelogramm sind die Diagonalen einander gleich; ϵ) in jedem gleichseitigen Parallelogramm stehen die Diagonalen auf einander senkrecht und halbiren die Winkel.

b) die folgenden noch nicht bewiesenen

Lehrsätze. Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn:

- α) die Gegenseiten gleich sind,
- β) nur zwei Gegenseiten gleich und parallel sind,
- γ) die Diagonalen einander halbiren.

Ein Parallelogramm ist δ) rechtwinklig, wenn die Diagonalen einander gleich sind,

ε) gleichseitig, wenn die Diagonalen auf einander senkrecht stehen.

§ 74.

Uebungsstoff.

Vorbemerkung. Bei geometrischen Constructionsaufgaben bezeichnet man der Kürze halber die Seiten eines Dreiecks mit a, b, c , die gegenüberliegenden Winkel mit α, β, γ , die Höhen mit h , die seitenhalbirenden Transversalen mit t , die winkelhalbirenden mit w . Durch einen angehängten Index wird die Zugehörigkeit zu einer Seite bezeichnet.

Anschauung. 1. Wie lauten die vier Congruenzsätze für das a) rechtwinklige; b) gleichschenklige; c) gleichseitige Dreieck?

2. Wie viel eindeutige Bestimmungsstücke hat a) das Quadrat; b) das Rechteck; c) der Rhombus; d) das Rhomboid; e) das gleichschenklige-rechtwinklige Dreieck; f) das ungleichseitig-rechtwinklige Dreieck; g) das gleichschenklige Dreieck; h) das gleichseitige Dreieck.

3. Wie kann man auf Grund des vierten Congruenzsatzes einen gezeichneten Winkel übertragen?

4. Warum müssen die beiden Dreiecke congruent sein, in welche ein gleichschenkliges Dreieck a) durch die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze; b) durch die Höhe; c) durch die seitenhalbirende Transversale getheilt wird?

Zeichnen. 5. Zeichne ein Dreieck mit dem Umfange $u = 0,153$ m, dessen Seiten sich wie $2:3:4$ verhalten!

6. Zeichne ein Dreieck, in welchem $c = 0,06$ m, $b = 0,044$ m und $\hat{\alpha} = 45^\circ$!

7. Zeichne ein Dreieck, in welchem c und a , ferner $\hat{\alpha}$ gegeben sind und gieb das Ergebniss der Construction näher an! $a = 0,065$ m, $0,064$ m, $0,075$ m, $0,033$ m, $0,035$ m; $b = 0,052$ m, $0,032$ m, $0,045$ m, $0,055$ m, $0,072$ m; $\hat{\alpha} = 33^\circ, \frac{5}{8}R, 143^\circ, 80^\circ, 27^\circ$.

8. Zeichne ein Dreieck, in welchem $c = 0,05$ m und $\hat{\alpha} : \hat{\beta} : \hat{\gamma} = 2 : 3 : 4$! Ein Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind: 9. a, b, h_c ; 10. a, b, h_a ; 11. $a, h_a, \hat{\beta}$; 12. $h_a, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$.

Zeichne mehrere Dreiecke 13. mit derselben Grundlinie und gleicher Höhe; 14. welche a und h_b gemeinschaftlich haben!

Zeichne zwei Dreiecke, deren Umfänge sich in 15. zwei; 16. drei; 17. vier; 18. fünf; 19. sechs Punkten schneiden!

20. Zeichne mit möglichst wenig Stücken vier gleichschenklige-rechtwinklige Dreiecke!

21. Zeichne vier gleichschenklige-rechtwinklige Dreiecke, die zusammen rechtwinklige Parallelogramme bilden!

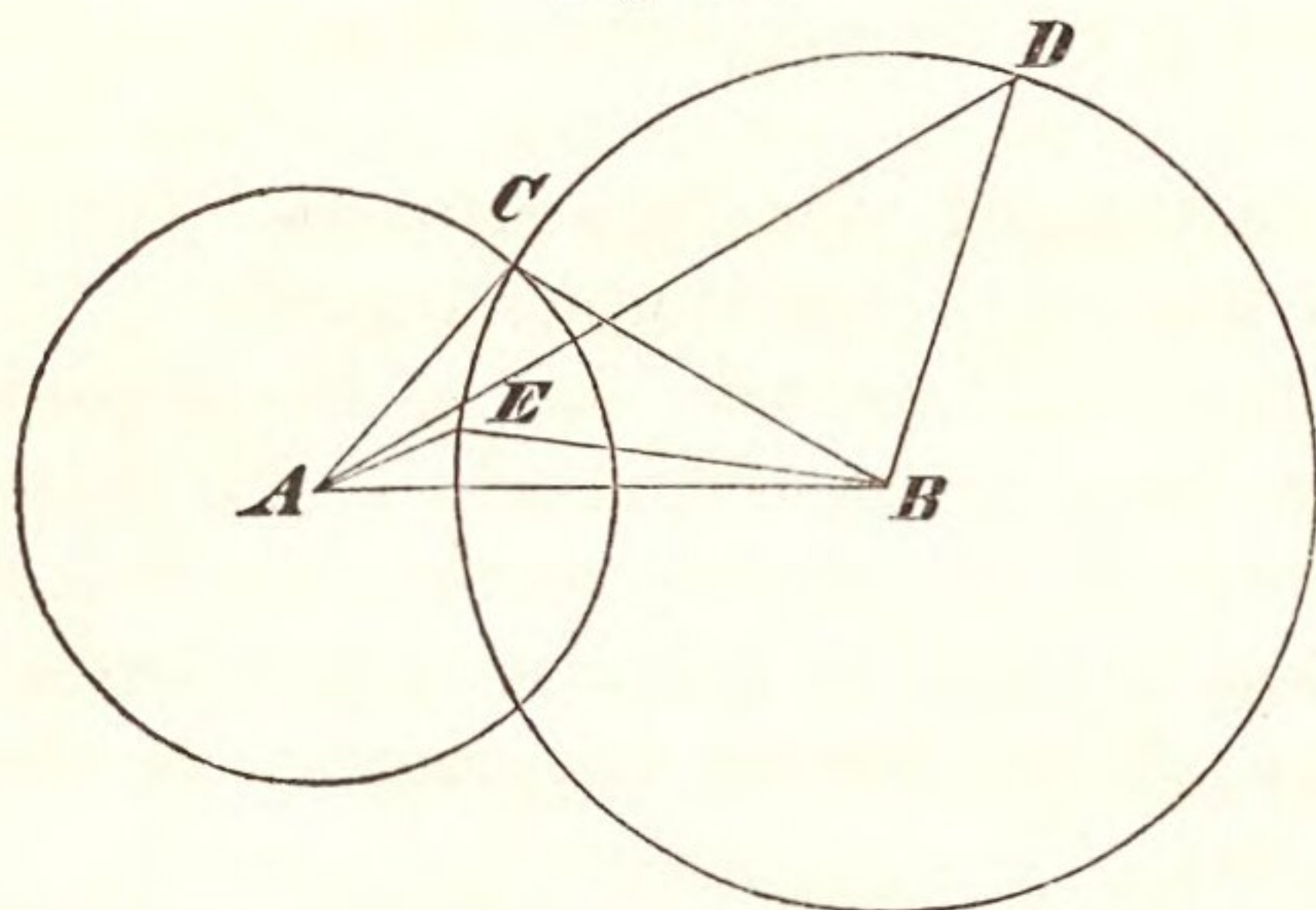
22. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck und theile es dann in a) vier; b) neun gleichseitige Dreiecke!

23. Zeichne zwei congruente gleichseitige Dreiecke derart, dass die sechs Ecken einen regelmässigen Stern bilden.

§ 75.

Aenderung der Gegenstücke.

Fig. 102.



1. Wird in dem Dreieck ABC $\hat{B}$ grösser, so dass BC etwa nach BD gelangt, so liegt D ausserhalb des um A mit AC geschriebenen Kreises, also ist mit dem Winkel auch die Gegenseite gewachsen. Nimmt dagegen $\hat{B}$ ab, so dass BC etwa nach BE gelangt, so liegt E innerhalb des Kreises um A , also $AE < AC$.

Lehrsatz. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, ist aber der eingeschlossene Winkel des einen Dreiecks grösser als der des anderen, so liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber.

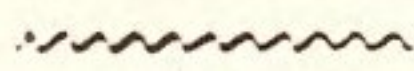
2. Da mit jeder Aenderung des Winkels eine Aenderung der Gegenseite verbunden ist, so folgt, dass die Gegenseiten nur dann gleich sein können, wenn die Gegenwinkel gleich sind; daher gilt auch die

Umkehrung. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, ist aber die dritte Seite des einen Dreiecks grösser als die dritte Seite des anderen, so liegt der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüber.

3. Beweise mit Hilfe dieser Sätze, dass die Diagonalen a) im ungleichseitigen Parallelogramm auf einander schief stehen; b) im schiefwinkligen Parallelogramm ungleich sind; sowie c) und d) die Umkehrungen von a und b.

Systematische Zusammenstellung der bewiesenen Lehrsätze

nach ihrem wissenschaftlichen Zusammenhange.



Vorbemerkung. Die folgende Zusammenstellung giebt die Sätze in wissenschaftlichem Zusammenhange. Sie ist bei Repetitionen zu benutzen. Es würde verfehlt sein, den erstarkten Wanderer denselben vielfach gewundenen Weg führen zu wollen, auf welchem der Anfänger, den Hindernissen ausweichend, den Gipfel erstieg. Es sei hier ausdrücklich bemerkt, dass die wissenschaftliche Begründung der einzelnen Sätze durchweg im Früheren enthalten ist. — Von hier an kann jedes Lehrbuch benutzt werden, indem der Unterricht, mit dem Abschnitt „Trapez“ anfangend, sich an das Vorige anschliesst. Hinter jedem Lehrsatz ist angegeben, 1. an welcher Stelle des Buches der strenge Beweis geführt ist, 2. welche Lehrsätze beim Beweise zu benutzen sind. E. bedeutet Erklärung, L. Lehrsatz, F. Folgesatz, U. Umkehrung.

Grundsätze.

1. Das Ganze ist grösser als jeder seiner Theile.
2. Sind zwei Grössen derselben dritten Grösse gleich, so sind sie unter einander gleich.
3. Ist von drei Grössen die erste grösser als die zweite, die zweite grösser als die dritte, so ist die erste erst recht grösser als die dritte.
4. Gleiches auf gleiche Weise verändert giebt Gleiches.
5. Grösseres zu Gleichem addirt giebt Grösseres.
6. Grösseres von Gleichem subtrahirt giebt Kleineres.
7. Gleiches von Grösserem subtrahirt giebt Grösseres.

I. Geraden, welche sich in einem Punkte schneiden.

E. Strahl, Halbstrahl, Strecke, Punkt, Halbstrahlenbüschel §§ 1 und 2; Messen § 6; verjüngter Massstab § 16; Winkel § 19; Eintheilung der Winkel § 21; Nebenwinkel, Supplement, Complement, Scheitelwinkel, Winkel über einer Geraden, Winkel um einen Punkt herum § 23; senkrechte Geraden § 24.

L. 1. Die Winkel um einen Punkt herum betragen zusammen $4R$. § 23, 4.

L. 2. Die Winkel über einer Geraden betragen zusammen $2R$. § 23, 4.

F. Nebenwinkel betragen zusammen $2R$. § 23, 1.

Da mit der Aenderung eines der beiden Winkel auch die Winkelsumme sich ändert, dieselbe also nur dann $2R$ beträgt, wenn die beiden Schenkel eine Gerade bilden, so gilt auch

U. von F. Haben zwei Supplementwinkel den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam, so liegen ihre nicht gemeinschaftlichen Schenkel in einer Geraden.

L. 3. Scheitelwinkel sind einander gleich. § 23, 4.

L. 4. Auf einer Geraden lässt sich in einem Punkte derselben nur eine Senkrechte errichten. § 24, 1.

II. Geraden, von welchen sich je zwei in einem Punkte schneiden.

E. Ebene Figur, Congruenz, Regelmässigkeit § 25; Eintheilung der ebenen Figuren, Aussenwinkel § 62.

L. 5. Die Summe der Aussenwinkel eines Polygons ist $= 4R$. § 62, 4.

L. 6. Die Winkelsumme eines Polygons ist $= n \cdot 2R - 4R$. § 62, 4 (L. 5, L. 2, F.).

F. 1. Die Winkelsumme eines Vierecks ist $= 4R$. § 62, 4 (L. 6).

F. 2. Die Winkelsumme eines Dreiecks ist $= 2R$. § 63, 4 (L. 6).

L. 7. Der Aussenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der ihm nicht anliegenden inneren Winkel. § 62, 5 (L. 6 F. 2, L. 2 F.).

L. 8. Auf eine Gerade lässt sich von einem Punkte ausserhalb derselben nur eine Senkrechte fallen. § 62, 5 (L. 7).

III. Parallele Geraden.

E. Parallelen § 64, 1; convergent, divergent § 64, 6; direct-, invers-parallel § 65, 1; correspondirende Winkel, Wechselwinkel, Gegenwinkel § 67, 1; Parallelwinkel § 69, 1.

Vorbemerkung. Die Sätze 9 bis 12 werden ganz in der Weise des § 64 bewiesen, nur werden nicht die Sätze aus der Symmetrie, welche im System später folgen, angewandt, sondern das Princip der Symmetrie, das Umklappen.

L. 9. Geraden sind parallel, wenn sie auf derselben Geraden senkrecht stehen. § 64, 1.

L. 10. Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden lässt sich nur eine Parallele zu derselben ziehen. § 64, 2 (L. 4, L. 9).

L. 11. Steht eine Gerade auf einer von zwei Parallelen senkrecht, so steht sie auch auf der anderen senkrecht. § 64, 3 (L. 10).

L. 12. Parallelen haben überall gleichen Abstand. § 64, 4 (L. 11, L. 4).

L. 13. Parallele Geraden und nur solche bilden mit jeder Transversalen gleiche correspondirende Winkel, gleiche Wechselwinkel und supplementäre Gegenwinkel. § 67, 2 (L. 6 F. 2, L. 2 F., L. 3).

L. 14. (U.) Geraden sind parallel, wenn sie mit einer Transversalen gleiche correspondirende Winkel oder gleiche Wechselwinkel oder supplementäre Gegenwinkel bilden. § 67, 2 (L. 13).

L. 15. Directe und inverse Parallelwinkel sind gleich, gemischte Parallelwinkel sind supplementär. § 69, 2 (L. 13, L. 3, L. 2 F.).

IV. Symmetrische Punkte und Geraden.

E. Erklärung von Symmetrie u. s. w. § 40.

L. 16. Symmetrische Strecken und Winkel sind gleich, symmetrische Figuren sind congruent. § 41 (E.).

L. 17. Die Verbindungsstrecke zweier symmetrischer Punkte wird von der Symmetralen halbirt und steht auf derselben senkrecht. § 42, 1 (L. 2 F.).

L. 18. (U.) Zwei Punkte sind symmetrisch, wenn ihre Verbindungsstrecke von der Symmetralen halbirt wird und auf derselben senkrecht steht. § 42, 1 (L. 4).

L. 19. Jeder Punkt der Symmetralen ist von zwei symmetrischen Punkten gleichweit entfernt. § 42, 2 (L. 16).

F. Jeder Punkt der Mittelsenkrechten einer Strecke ist von den Endpunkten derselben gleichweit entfernt. § 45, 1 (L. 19).

L. 20. Die Verbindungslinie zweier Punkte ist symmetrisch zur Verbindungslinie ihrer symmetrischen Punkte. § 42, 3 (E.).

L. 21. Symmetrische Geraden sind entweder der Symmetralen parallel oder sie schneiden sich auf derselben. § 43, 1 und § 64, 5 (E.).

L. 22. Der Winkel zwischen zwei symmetrischen Geraden wird von der Symmetralen halbiert. § 43, 2 (L. 16).

L. 23. (U.) Zwei Geraden sind symmetrisch, wenn sie sich auf der Symmetralen schneiden und gleiche Winkel mit ihr bilden. § 43, 2 (E.).

L. 24. Jeder Punkt der Symmetralen ist von zwei symmetrischen Geraden gleichweit entfernt. § 43, 3 (E., L. 8).

F. Jeder Punkt der Halbierungslinie eines Winkels ist von den beiden Schenkeln gleichweit entfernt. § 45, 2.

L. 25. Der Durchschnittspunkt zweier Geraden (Linien) ist symmetrisch zum (entsprechenden) Durchschnittspunkt ihrer symmetrischen Geraden (Linien). § 43, 4 (E.).

V. Anwendung der Symmetrie auf den Kreis.

E. Kreis, Halbmesser, Secante, Sehne, Durchmesser, Bogen, Segment, Sector § 9; Centriwinkel § 20; Tangente, Centrale § 46.

L. 26. Zu gleichen Centriwinkeln eines Kreises oder gleicher Kreise (und nur zu solchen) gehören gleiche Bogen, Sehnen, Sektoren. (Drei Umkehrungen.) Beweis durch Symmetrie.

L. 27. Fällt man vom Mittelpunkte eines Kreises die Senkrechte auf eine Sehne, so halbiert dieselbe die Sehne, den zugehörigen Centriwinkel und Bogen. § 46, 2 (Symmetrie).

Da nur die eine Senkrechte diese Eigenschaft hat, so gelten auch die Umkehrungen:

U. 1. Die Verbindungsstrecke des Mittelpunktes eines Kreises mit der Mitte einer Sehne steht auf derselben senk-

recht und halbirt den zugehörigen Centriwinkel und Bogen. (L. 27.)

U. 2. Die Halbirungslinie eines Centriwinkels halbirt auch die zugehörige Sehne, steht auf derselben senkrecht und halbirt den zugehörigen Bogen. (L. 27.)

U. 3. Die Mittelsenkrechte einer Sehne geht durch den Mittelpunkt und halbirt den zugehörigen Centriwinkel und Bogen. (L. 27.)

Anmerkung. Die entsprechenden Sätze über das gleichschenklige Dreieck siehe § 53, 3.

L. 28. Eine Gerade ist Tangente, wenn sie auf einem Radius in seinem Endpunkte senkrecht steht. § 47, 5b.

Da es auf dem Radius im Endpunkte nur eine Senkrechte giebt, so folgt:

L. 29. Durch einen Punkt eines Kreises lässt sich nur eine Tangente an denselben ziehen.

Ferner ergeben sich aus demselben Grunde ohne Weiteres die Umkehrungen von L. 28.

U. 1. Der Radius nach dem Berührungspunkte einer Tangente steht senkrecht auf derselben. (L. 28.)

U. 2. Das Loth vom Mittelpunkte eines Kreises auf eine Tangente geht durch den Berührungspunkt. (L. 28.)

U. 3. Die Senkrechte auf einer Tangente im Berührungspunkte geht durch den Mittelpunkt des Kreises. (L. 28.)

L. 30. Die Centrale zweier sich schneidenden Kreise steht auf der gemeinschaftlichen Sehne senkrecht und halbirt dieselbe. § 64, 4 (Symmetrie).

Anmerkung. Den entsprechenden Satz für zwei gleichschenklige Dreiecke mit gemeinschaftlicher Basis siehe § 54, 1.

VI. Dreieck.

E. Dreieck § 27, 3; Eintheilung § 62, 4; Bestimmungsstücke § 72.

L. 31. Gleiche Seiten eines Dreiecks haben gleiche Gegenwinkel. § 53, 2 (Symmetrie).

L. 32. Die grössere Seite eines Dreiecks hat den grösseren Gegenwinkel. § 70, 3 (L. 31.)

L. 33 (U. von 31). Gleiche Winkel eines Dreiecks haben gleiche Gegenseiten. § 53, 6 (L. 31, 32).

L. 34 (U. von 32). Der grössere Winkel eines Dreiecks hat die grössere Gegenseite. § 70, 3 (L. 31, 32).

L. 35. Jedem Dreiecke lässt sich je ein Kreis ein- und umschreiben. § 71, 1 und 2.

Dieser Satz zerfällt in die beiden folgenden:

a) Die Mittelsenkrechten auf den Seiten eines Dreiecks schneiden sich in demselben Punkte, dem Mittelpunkte des umgeschriebenen Kreises. (L. 19. F.)

b) Die winkelhalbirenden Transversalen eines Dreiecks schneiden sich in demselben Punkte, dem Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises. (L. 24. F.)

L. 36. Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen. (I. C.) § 72, 2 (Symmetrie).

L. 37. Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. (II. C.) § 72, 2.

L. 38. Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der grösseren übereinstimmen. (III. C.) § 72, 2.

L. 39. Dreiecke sind congruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen. (IV. C.) § 72, 2.

L. 40. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, ist aber der eingeschlossene Winkel des einen Dreiecks grösser als der eingeschlossene Winkel des anderen, so liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber. § 75, 1.

L. 41 (U. von 40). Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, ist aber die dritte Seite des einen Dreiecks grösser als die dritte Seite des anderen, so liegt der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüber. § 75, 2 (L. 40).

VII. Parallelogramm.

E. Erklärung § 65, 3; Eintheilung § 66; Diagonale § 27, 1.

L. 42. Jede Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke. § 73, 2 (L. 36).

L. 43. In jedem Parallelogramm sind a) die Gegenwinkel gleich; b) die Gegenseiten gleich und c) halbiren die Dia-

gonalen einander. § 73, 2 [a) L. 6 F., L. 13; b) L. 42; c) L. 43b, L. 36].

L. 44. Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn die Gegenwinkel gleich sind. § 73, 2 (L. 6 F. 1, L. 14).

L. 45. Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn die Gegenseiten gleich sind. § 73, 2 (L. 39, L. 14).

L. 46. Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn nur zwei Gegenseiten gleich und parallel sind. § 73, 2 (L. 37, L. 14).

L. 47. Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn die Diagonalen einander halbieren. § 73, 2 (L. 39, L. 14).

L. 48. Im rechtwinkligen Parallelogramm sind die Diagonalen gleich. § 73, 2 (L. 37).

L. 49. Im schiefwinkligen Parallelogramm sind die Diagonalen ungleich. § 75, 3 (L. 40).

L. 50. Im gleichseitigen Parallelogramm stehen die Diagonalen senkrecht auf einander. § 73, 2 (L. 39, L. 2 F.).

L. 51. Im ungleichseitigen Parallelogramm stehen die Diagonalen schief auf einander. § 75, 3 (L. 41, L. 2 F.).

L. 52 (U. von 48). Ein Parallelogramm ist rechtwinklig, wenn die Diagonalen gleich sind. § 73, 2 (L. 39, L. 13).

L. 53 (U. von 49). Ein Parallelogramm ist schiefwinklig, wenn die Diagonalen ungleich sind. § 75, 3 (L. 41, L. 13).

L. 54 (U. von 50). Ein Parallelogramm ist gleichseitig, wenn die Diagonalen senkrecht auf einander stehen. § 73, 2 (L. 37).

L. 55 (U. von 51). Ein Parallelogramm ist ungleichseitig, wenn die Diagonalen auf einander schief stehen. § 75, 3 (L. 40).

VIII. Körper.

E. Würfel u. s. w. § 25. Netz, Liter, Kilogramm § 26; Gerade Quadrat- und Oblongsäule § 31; Rhomboëder § 48; Tetraëder, Octaëder, Ikosaëder § 56; Schiefe Rhomb- und Rhomboidsäule § 59.



Leitfaden der ebenen Geometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. Von Dr. H. Müller. II. Theil: Die Kegelschnitte und die Elemente der neueren Geometrie. gr. 8. 1875. geh. *M.* 1.60.

Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Von Dr. ERLER, Prof. u. I. Oberlehrer am Kgl. Pädagogium bei Züllichau. Zum Gebrauche in der Gymnasialprima. Mit einer lithographirten Figurentafel. gr. 8. 1877. geh. *M.* —.60.

Leitfaden der ebenen Geometrie mit 700 Uebungssätzen und Aufgaben. Von Dr. JULIUS KOBER. gr. 8. 1874. geh. *M.* 1.—

Lehrbuch der elementaren Geometrie für Gymnasien und Realschulen bearbeitet von F. J. BROCKMANN. Erster Theil: Die Planimetrie. 2. Aufl. Mit 139 Figuren in Holzschnitt. gr. 8. 1877. geh. *M.* 2.— Zweiter Theil: Die Stereometrie. Mit 84 Figuren in Holzschnitt. gr. 8. 1875. geh. *M.* 1.60.

Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet von F. J. BROCKMANN. Mit 46 Holzschnitten. gr. 8. 1869. geh. *M.* 1.60.

Leitfaden der Stereometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen. Von Dr. HUBERT MÜLLER. I. Theil: Die Grundgebilde und die einfachsten Körperformen. Mit zahlreichen Holzschnitten und drei (lithogr.) Tafeln. gr. 8. 1877. geh. *M.* 2.—

Lehrbuch der analytischen Geometrie. Bearbeitet von O. Fort u. O. SCHLÖMILCH. M. viel. Holzschn. 2 Thle. 4. Aufl. gr. 8. 1877. geh. *M.* 9.—

Einzeln: I. Theil: Analyt. Geometrie der Ebene. Von O. Fort. *M.* 4.—

II. Theil: Analyt. Geometrie des Raumes. Von O. Schlämilch. *M.* 5.—

Sammlung von Beispielen u. Aufgaben aus der Stereometrie u. Trigonom. Von Dr. F. REIDT. 2 Theile. 2. Aufl. gr. 8. 1877. geh. *M.* 7.—

Einzeln: I. Theil: Trigonometrie. *M.* 4.—

II. Theil: Stereometrie. *M.* 3.—

———— **Resultate.** 2. Auflage. I. Theil *M.* 1.80, II. Theil *M.* 1.—

Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Von O. SCHLÖMILCH. 2 Theile. 2. u. 3. Aufl. gr. 8. 1874—1878. geh. *M.* 13.60.

Einzeln: I. Theil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. 3. Aufl. 1878. *M.* 6.—

II. Theil: Aufgaben aus der Integralrechnung. 2. Aufl. 1874. *M.* 7.60.

Die Grundlehren der höheren Analysis. Ein Lehr- und Handbuch für den ersten Unterricht in der höheren Mathematik. Zum Gebrauch an Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Von Dr. J. WENCK. Mit 140 Figuren in Holzschn. gr. 8. 1872. geh. *M.* 6.—

Die Determinanten elementar behandelt von O. Hesse. 2. Aufl. gr. 8. 1872. geh. *M.* 1.20.

Vorschule der Theorie der Determinanten für Gymnasien und Realschulen. Von Dr. F. REIDT. gr. 8. 1874. geh. *M.* 1.—

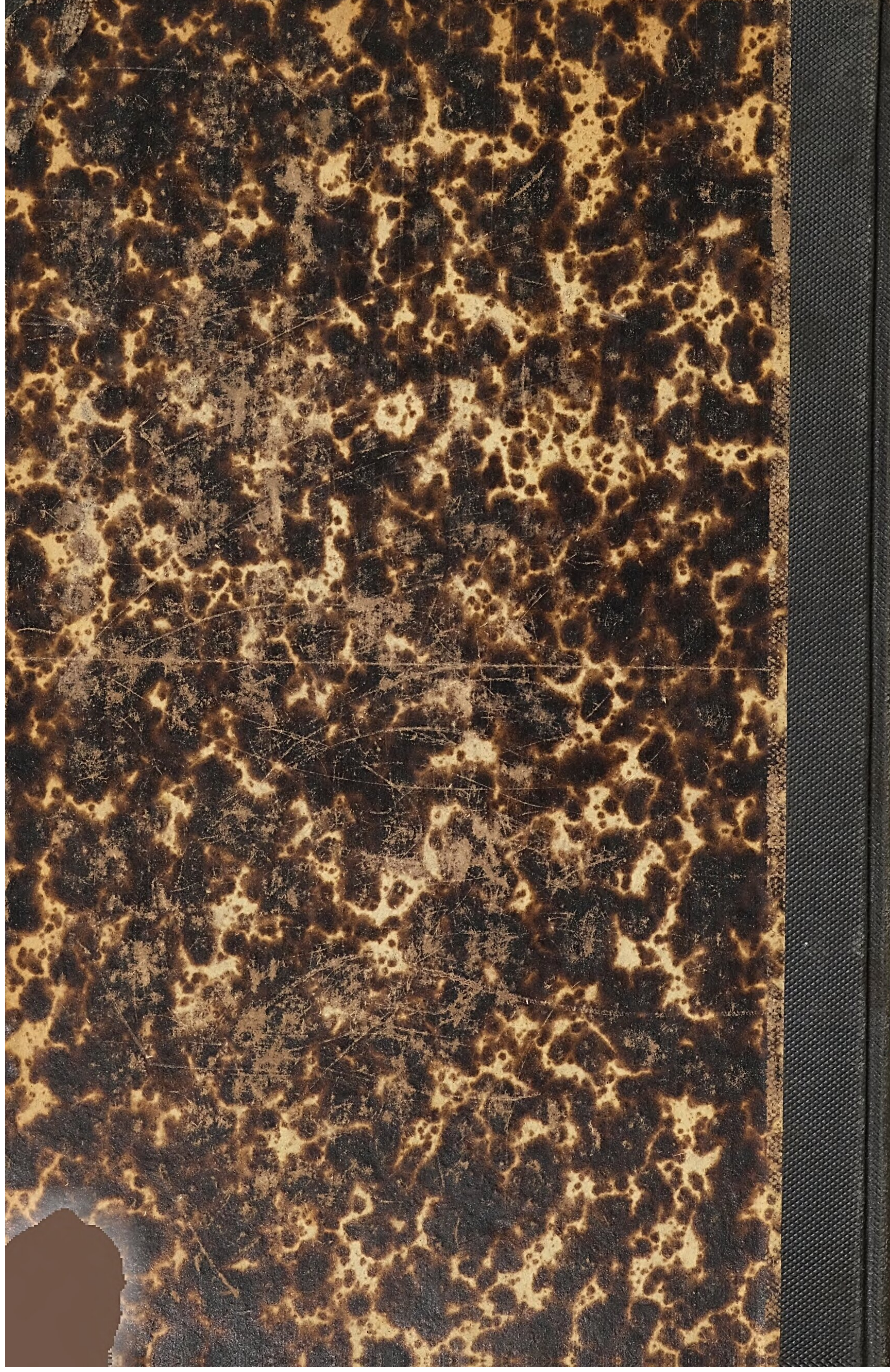
Elemente der darstellenden Geometrie. Von Dr. Rudolf STURM, Professor am Polytechnikum zu Darmstadt. Mit 12 lithographirten Tafeln. gr. 8. 1874. geh. *M.* 4.—

Die Methoden der darstellenden Geometrie zur Darstellung geometrischer Elemente und Grundgebilde. Von KARL KLEKLER, Professor an der K. K. Marine-Akademie zu Fiume. Mit 14 lithographirten Tafeln. gr. 8. 1877. geh. *M.* 4.40.

Die darstellende Geometrie. Ein Grundriss für Vorlesungen an technischen Hochschulen u. z. Selbststudium. Von Dr. W. FIEDLER. Mit 228 Holzschn. und 12 lithogr. Taf. 2. Aufl. gr. 8. 1875. geh. *M.* 18.—

Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung d. neueren Methoden. Von GEORGE SALMON. Deutsch frei bearbeitet von Dr. W. FIEDLER. 4. Aufl. gr. 8. 1878. geh. *M.* 14.40.

- Analytische Geometrie des Raumes.** Von George Salmon.
Deutsch von Dr. W. FIEDLER. 2 Bde. 2. Aufl. gr. 8. 1874. geh. *M.* 24. —
- Einleitung in die synthetische Geometrie. Ein Leitfadens beim**
Unterricht an höheren Realschulen und Gymnasien. Mit vielen Holz-
schnitten im Text. Von C. F. GEISER. gr. 8. 1869. geh. *M.* 3. —
- Grundlinien der neueren Geometrie mit besonderer Berück-**
sichtigung der metrischen Verhältnisse von Systemen von Punkten
in einer Graden und einer Ebene. Von B. WITZSCHEL. Mit in den
Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1857. geh. *M.* 6. —
- Theorie der elliptischen Functionen. Versuch einer elementaren**
Darstellung. Von Dr. H. DURÈGE. Dritte Auflage. Mit 32 Holz-
schnitten. gr. 8. 1878. geh. *M.* 9. —
- Die Probleme der Brechung und Reflexion.** Von O. Röthig.
gr. 8. 1876. geh. *M.* 2.80.
- Handbuch der höheren Algebra.** Von J. A. Serret. Deutsch
bearb. v. G. WERTHEIM. Zweite Auflage. I. Bd. gr. 8. 1878. geh. *M.* 9. —
- Faßliche Anleitung zum gründlichen Unterricht in der Algebra.**
Ausführliche Auflösung der in Meier Hirsch's Sammlung enthaltenen
Gleichungen u. Aufgab. Von J. G. Schrödter. gr. 8. 1850. geh. *M.* 3.90.
- Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den**
Methoden zu ihrer Auflösung. Von ERNST BARDEY. gr. 8. 2., durch
viele Zahlenbeispiele erweiterte, vermehrte und verbesserte Auflage.
1875. geh. *M.* 6. —
- Quadratische Gleichungen mit den Lösungen für die oberen**
Klassen höherer Lehranstalten. Von ERNST BARDEY. gr. 8. 1871.
geh. *M.* 1.60.
- Eine elementare Methode zur Bestimmung von grössten und**
kleinsten Werthen, nebst vielen Aufgaben. Von Dr. HERMANN
HEILERMANN. Mit 21 Holzschnitten. gr. 8. 1871. geh. *M.* 2.40.
- Mathematische Aufgaben aus der Physik nebst Auflösungen.**
Von E. KAHL. Mit vielen Holzschn. 2. Aufl. gr. 8. 1874. geh. *M.* 5. —
- Lehrbuch der Physik für höhere Lehranstalten.** Von Dr.
H. LORBERG, Oberlehrer am Lyceum zu Strassburg. Mit zahlreichen
Holzschnitten und einer lithogr. Tafel. gr. 8. 1877. geh. *M.* 4. —



Boerner, Heinrich,

Lehrbuch zum Einführung in die Geometrie für höhere Schulen

Leipzig 1879

Math.p. 44 I

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11390578-7